

Malé statistické repetitorium

Zadání příkladů

Příklad 1: Rozdělení náhodné veličiny, základní charakteristiky

Rozdělení diskretní náhodné veličiny X je dáno následující tabulkou.

x	0	1	4	5
$P(X=x)$	0,05	0,5	0,25	0,2

- Nakreslete graf distribuční funkce veličiny X (pozn.: pamatujte, že $F(x) = P(X \leq x)$).
- Spočítejte EX .
- Spočítejte $\text{var } X$.

Příklad 2: Lineární kombinace dvou nezávislých náhodných veličin

Jsou dány *nezávislé* náhodné veličiny X a Y , přičemž:

$$EX = 10, \quad \text{var } X = 1, \\ EY = 5, \quad \text{var } Y = 2.$$

Spočítejte:

- $E[4X]$.
- $E[X+5]$.
- $E[X+Y]$.
- $E[4X+3Y]$.
- $\text{var}[4X]$.
- $\text{var}[X+5]$.
- $\text{var}[X+Y]$.
- $\text{var}[4X+3Y]$.

Příklad 3: Sdružené dvojrozměrné rozdělení

Sdružené rozdělení náhodných veličin X a Y udává následující tabulka. Nejprve rozhodněte, zda jsou veličiny nezávislé, a pak spočítejte:

- $E[X|Y=1]$ a $E[Y|X=1]$.
- EX a EY .
- $\text{var } X$ a $\text{var } Y$.
- $\text{cov}(X, Y)$.
- $\text{var}[X+Y]$.

$P(X=x, Y=y)$		y		
		0	1	4
x	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0

Příklad 4: Podmíněná střední hodnota

Uvažujme opět náhodné veličiny X a Y z příkladu 3. V bodě **3a** jsme hledali střední hodnotu veličiny Y za podmínky, že víme, že veličina X nabyla hodnoty 0. Obecně bychom mohli hledat střední hodnotu Y při libovolné známé hodnotě x veličiny X . Zapište předpis funkce

$$f(x) = E[Y|X=x].$$

Funkci $f(x)$ se říká *podmíněná střední hodnota Y při daném X* a značí se často jako $E[Y|X]$.

Příklad 5: Sdružené dvojrozměrné rozdělení

Pomocí náhodných veličin X a Y z příkladu 3 definujeme *vektorovou náhodnou veličinu* (nebo též *náhodný vektor*) $\mathbf{Z}$ předpisem

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = (X, Y)^T.$$

Dále definujeme (konstantní) matici $\mathbf{A}$ jako

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pomocí výsledků z příkladu 3 určete

- $E\mathbf{Z}$ a $\text{var}\mathbf{Z}$.
- $E[\mathbf{AZ}]$ a $\text{var}[\mathbf{AZ}]$.

Příklad 6: Normální rozdělení

Náhodné veličiny X a Y necht' jsou nezávislé a mají obě *normované normální rozdělení*. Připomeňme, že zápis $N(\mu; \sigma^2)$ představuje normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 a že normované rozdělení je rozdělení $N(0;1)$. Definujme pomocí těchto veličin vektor $\mathbf{Z}$ opět předpisem $\mathbf{Z} = (X, Y)^T$. Určete pravděpodobnostní rozdělení následujících náhodných veličin:

- a) $3X + 5$.
 b) $[1 \ 1]\mathbf{Z} = X + Y$.
 c) $(X + Y)/2$.
 d) $\mathbf{Z}$.
 e) $\mathbf{AZ}$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Příklad 7: Některé transformace normálně rozdělených veličin

Náhodné veličiny $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ jsou nezávislé a mají všechny normované normální rozdělení. Definujme náhodný vektor $\mathbf{X}$ předpisem $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{10})^T$. Určete pravděpodobnostní rozdělení náhodných veličin

- a) $Y = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{10}}{10} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i = \frac{1}{10} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{10 \text{ složek}} \mathbf{X}$.
 b) $Z = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{10}^2 = \sum_{i=1}^{10} X_i^2 = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$.
 c) $T = \frac{10Y}{\sqrt{Z}}$.

Příklad 8: Kvantilová funkce, interval spolehlivosti

- a) Najděte medián a 70% kvantil rozdělení náhodné veličiny X z příkladu 1.
 b) Najděte interval, do kterého spadne veličina Y z příkladu 7 na 95%. Přesně řečeno, najděte taková čísla l a u , aby platilo $P(Y \leq l) = P(Y \geq u) = 2,5\%$. Hledaný interval je potom (l, u) .
 c) Najděte obdobný interval pro veličinu T .

Příklad 9: Náhodný výběr z normálního rozdělení

Náhodné veličiny $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ jsou nezávislé a pochází z rozdělení $N(\mu; \sigma^2)$. Označme symboly $\bar{X}$ a S^2 náhodné veličiny

$$\bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i,$$

$$S^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2.$$

Určete rozdělení následujících náhodných veličin:

- a) $\bar{X}$.
 b) $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{10}}}$.
 c) $Z = \frac{9S^2}{\sigma^2}$.
 d) $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{10}}}$.

Příklad 10: Test hypotézy o střední hodnotě

Náhodné veličiny $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ jsou nezávislé a mají všechny stejné rozdělení (označme jej L). Známe hodnoty jedné realizace těchto náhodných veličin (tj. *výběrový soubor*) $x_1, x_2, \dots, x_{10}$, jejichž hodnoty (zapsané do sloupcového vektoru $\mathbf{x}$) jsou následující:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Testujte na 95% hladině významnosti hypotézu, že střední hodnota rozdělení L je rovna 2, proti oboustranné alternativě, tj. testujte:

$$H_0: \mu = 2,$$

$$H_1: \mu \neq 2,$$

kde μ je střední hodnota rozdělení L . Předpokládejte přitom, že víme...

- a) ... že rozptyl L je 1.
 b) ... že L je normální rozdělení (s neznámým rozptylem).