Teorie užitku a její paradoxy

Martin Dlouhý

Teorie užitku

- Teorie užitku je součástí ekonomické teorie. Slouží k analýze spotřebitelského chování.
- Ekonomie rozlišuje kardinalistickou teorii (mohu říci, kolikrát je něco užitečnějšího) a ordinalistickou teorii (mohu říci pouze pořadí dle užitečnosti).
- V teorii her jsou výsledky hry ve formě číselných hodnot, což umožňuje hráčům porovnat výsledky zvolených strategií.
- Teorii užitku tedy potřebujeme pro konstrukci výplatních funkcí.
- Někdy je to snadné, např. 0 a 1 v koaličních hrách.

Petrohradský paradox (1)

- Daniel Bernoulli, 1738
- Teorie očekávané hodnoty: očekávaná hodnota = vážený průměr hodnot všech výsledků, kde váhy představují pravděpodobnosti výsledků.
- Petrohradský paradox ukazuje, že teorie očekávané hodnoty není dostatečná pro vysvětlení rozhodování jedinců za rizika.

Petrohradský paradox (2)

- Existuje herna, kde každý může hrát jednu zvláštní hru pouze jednou
- Hází se mincí, dokud nepadne poprvé hlava. Když padne hlave v n-tém hodu, bankéř vyplatí hráči výhru 2^n.
- Hráč má právo vzdát se nabízené hry za jakoukoli částku (ve hře lze pouze vyhrát). Bankéř nabídku může přijmout, nebo odmítnout, pokud se mu bude zdát částka vysoká. Když bankéř odmítne, hra se bude hrát.

Petrohradský paradox (3)

- Existuje herna, kde každý hráč může hrát jednu zvláštní hru pouze jednou.
- Hází se mincí, dokud nepadne poprvé hlava. Když padne hlava v n-tém hodu, bankéř vyplatí hráči výhru 2^n Kč.
- Např. při hře (orel, orel, hlava) je výhra $2^3 = 8$ Kč
- Hráč se může vzdát nabízené hry za jakoukoli částku (lze pouze vyhrát). Bankéř nabídku přijme, nebo odmítne, pokud se mu bude zdát částka vysoká. Pak se hra bude hrát.
- Za kolik byste prodali právo hrát danou hru?

Petrohradský paradox (4)

- Výpočet střední hodnoty výhry = výhra x pravděpodobnost

$$2\frac{1}{2}+4\frac{1}{4}+8\frac{1}{8}+16\frac{1}{16}+\ldots+2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots\quad=1+1+1+1+\ldots\quad=\infty.$$

- Bankéř by měl hráči vyplatit libovolně velkou částku hráčem požadovanou a být spokojen, že hernu ochránil před potenciálně ještě vyšší výhrou. To však bankéř a příliš velkou částku odmítne. To si uvědomuje i hráč, takže podle toho musí volit svou strategii.

Petrohradský paradox (5)

- Bernoulli navrhuje střední hodnotu peněžní výhry nahradit užitečnosti peněz. V podstatě tedy pracuje s užitkovou funkcí (teorie očekávaného užitku).
- Když hráč za hru požaduje odstupné 10 Kč, tak má užitkovou funkci ve tvaru:

$$u(10) = u(2)\frac{1}{2} + u(4)\frac{1}{4} + \ \dots + u(2^n)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$$

Axiomatická teorie užitku (1)

- Teorie popsána v Theory of Games and Economic Behavior (1944) ve formě axiomů (jde o teorii očekávaného užitku).
- Užitková funkce známa jako von Neumannova-Morgensternova užitková funkce.
- Možnost měřitelnosti užitků je odvozena od pravděpodobnostního přístupu (loterie)

Axiomatická teorie užitku (2)

- Uvažujme události A, B, C s preferencemi A > B > C.
- Nyní uvažujme událost (loterii) AC, že A nastane s p=0,5, nebo nastane C s p= 0,5.
- Srovnejme B a AC. Když jedinec preferuje B, je B blíže k A než k C. Když preferuje AC, tak je B blíže k C.
- A takto můžeme postupovat i v dalších krocích dosazování různých pravděpodobností, čímž určíme polohu B.
- Soustavu preferencí je možné vyjádřit numericky (kardinalistická teorie užitku)

Allaisův paradox (1)

- Paradox ukazuje, že lidé porušují axiomy teorie očekávaného užitku.
- Účastníci experimentu mají porovnat loterii *A* ku *B* a loterii *C* ku *D*.

Hra 1	**výhra**	**pravděpodobnost**
Loterie A:	1 mil. Kč	100 %
Loterie B:	5 mil. Kč	10 %
	1 mil. Kč	89 %
	0 Kč	1 %

Allaisův paradox (2)

Hra 2	**výhra**	**pravděpodobnost**
Loterie C:	5 mil. Kč	10 %
	0 Kč	90 %
Loterie D:	1 mil. Kč	11 %
	0 Kč	89 %

Allaisův paradox (3)

- V experimentu lidé preferovali A před B a C před D. Platí tedy:

$u(1) > 0{,}10\, u(5) + 0{,}89\, u(1) + 0{,}01\, u(0)$ (*A* je lepší než *B*)

$0{,}10\, u(5) + 0{,}90\, u(0) > 0{,}11\, u(1) + 0{,}89\, u(0)$ (*C* je lepší než *D*)

- Ve druhé nerovnosti dosadíme $0{,}11\, u(1) = u(1) - 0{,}89\, u(1)$

$0{,}10\, u(5) + 0{,}90\, u(0) > u(1) - 0{,}89\, u(1) + 0{,}89\, u(0)$

- Nyní k oběma stranám přičteme $0{,}89u(1) - 0{,}89u(0)$

$0{,}10\, u(5) + 0{,}89\, u(1) + 0{,}01\, u(0) > u(1)$ (*B* je lepší než *A*)

Vícekriteriální hry

- Rozšíření na situace, kdy se hráči rozhodují podle více kritérií.
- Jednoduchý postup je lexikografické uspořádání kritérií. Pouze když je více rovnováh, tak do rozhodnutí zapojíme druhé či další kritérium.
- Dalším jednoduchým přístupem je skalarizace vektorových výplatních funkcí pomocí vah.
- Aditivní funkce užitku:

$$u(i) = \sum_{j=1}^{r(i)} v_j \, u_j\,[f_j\,(i)],$$