# Teorie užitku a její paradoxy

Martin Dlouhý

# Teorie užitku

- Teorie užitku je součástí ekonomické teorie. Slouží k analýze spotřebitelského chování.
- Ekonomie rozlišuje kardinalistickou teorii (mohu říci, kolikrát je něco užitečnějšího) a ordinalistickou teorii (mohu říci pouze pořadí dle užitečnosti).
- V teorii her jsou výsledky hry ve formě číselných hodnot, což umožňuje hráčům porovnat výsledky zvolených strategií.
- Teorii užitku tedy potřebujeme pro konstrukci výplatních funkcí.
- Někdy je to snadné, např. 0 a 1 v koaličních hrách.

# Petrohradský paradox (1)

- Daniel Bernoulli, 1738
- Teorie očekávané hodnoty: očekávaná hodnota = vážený průměr hodnot všech výsledků, kde váhy představují pravděpodobnosti výsledků.
- Petrohradský paradox ukazuje, že teorie očekávané hodnoty není dostatečná pro vysvětlení rozhodování jedinců za rizika.

# Petrohradský paradox (2)

- Existuje herna, kde každý hráč může hrát jednu zvláštní hru pouze jednou.
- Hází se mincí, dokud nepadne poprvé hlava. Když padne hlava v n-tém hodu, bankéř vyplatí hráči výhru $2^n$ Kč.
- Např. při hře (orel, orel, hlava) je výhra $2^3 = 8$ Kč
- Hráč se může vzdát nabízené hry za jakoukoli částku (lze pouze vyhrát). Bankéř nabídku přijme, nebo odmítne, pokud se mu bude zdát částka vysoká. Pak se hra bude hrát.
- Za kolik byste prodali právo hrát danou hru?

# Petrohradský paradox (3)

- Výpočet střední hodnoty výhry = výhra x pravděpodobnost

$$2\frac{1}{2}+4\frac{1}{4}+8\frac{1}{8}+16\frac{1}{16}+\ldots+2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots \quad = 1+1+1+1+\ldots \quad = \infty.$$

- Bankéř by měl hráči vyplatit libovolně velkou částku hráčem požadovanou a být spokojen, že hernu ochránil před potenciálně ještě vyšší výhrou. To však bankéř a příliš velkou částku odmítne. To si uvědomuje i hráč, takže podle toho musí volit svou strategii.

# Petrohradský paradox (4)

- Bernoulli navrhuje střední hodnotu peněžní výhry nahradit užitečnosti peněz. V podstatě tedy pracuje s užitkovou funkcí (teorie očekávaného užitku).
- Když hráč za hru požaduje odstupné 10 Kč, tak má užitkovou funkci ve tvaru:

$$u(10) = u(2)\frac{1}{2} + u(4)\frac{1}{4} + \ldots + u(2^n)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots$$

# Axiomatická teorie užitku (1)

- Teorie popsána v Theory of Games and Economic Behavior (1944) ve formě axiomů (jde o teorii očekávaného užitku).
- Užitková funkce známa jako von Neumannova-Morgensternova užitková funkce.
- Možnost měřitelnosti užitků je odvozena od pravděpodobnostního přístupu (loterie)

# Axiomatická teorie užitku (2)

- Uvažujme události A, B, C s preferencemi A > B > C.
- Nyní uvažujme událost (loterii) AC, že A nastane s p=0,5, nebo nastane C s p= 0,5.
- Srovnejme B a AC. Když jedinec preferuje B, je B blíže k A než k C. Když preferuje AC, tak je B blíže k C.
- A takto můžeme postupovat i v dalších krocích dosazování různých pravděpodobností, čímž určíme polohu B.
- Soustavu preferencí je možné vyjádřit numericky (kardinalistická teorie užitku)

# Allaisův paradox (1)

- Paradox ukazuje, že lidé porušují axiomy teorie očekávaného užitku.
- Účastníci experimentu mají porovnat loterii *A* ku *B* a loterii *C* ku *D*.

| **Hra 1** | **výhra** | **pravděpodobnost** |
|---|---|---|
| Loterie A: | 1 mil. Kč | 100 % |
| Loterie B: | 5 mil. Kč | 10 % |
| | 1 mil. Kč | 89 % |
| | 0 Kč | 1 % |

# Allaisův paradox (2)

| **Hra 2** | **výhra** | **pravděpodobnost** |
|---|---|---|
| Loterie C: | 5 mil. Kč | 10 % |
| | 0 Kč | 90 % |
| Loterie D: | 1 mil. Kč | 11 % |
| | 0 Kč | 89 % |

# Allaisův paradox (3)

- V experimentu lidé preferovali A před B a C před D. Platí tedy:

$u(1) > 0{,}10\ u(5) + 0{,}89\ u(1) + 0{,}01\ u(0)$ (*A* je lepší než *B*)

$0{,}10\ u(5) + 0{,}90\ u(0) > 0{,}11\ u(1) + 0{,}89\ u(0)$ (*C* je lepší než *D*)

- Ve druhé nerovnosti dosadíme $0{,}11\ u(1) = u(1) - 0{,}89\ u(1)$

$0{,}10\ u(5) + 0{,}90\ u(0) > u(1) - 0{,}89\ u(1) + 0{,}89\ u(0)$

- Nyní k oběma stranám přičteme $0{,}89u(1) - 0{,}89u(0)$

$0{,}10\ u(5) + 0{,}89\ u(1) + 0{,}01\ u(0) > u(1)$ (*B* je lepší než *A*)

# Vícekriteriální hry

- Rozšíření na situace, kdy se hráči rozhodují podle více kritérií.
- Jednoduchý postup je lexikografické uspořádání kritérií. Pouze když je více rovnováh, tak do rozhodnutí zapojíme druhé či další kritérium.
- Dalším jednoduchým přístupem je skalarizace vektorových výplatních funkcí pomocí vah.
- Aditivní funkce užitku:

$$u(i) = \sum_{j=1}^{r(i)} v_j \; u_j \left[ f_j(i) \right],$$