

# Opakované hry

Martin Dlouhý

# Opakovaná hra (1)

- Doposud hráli hráči danou hru pouze jednou.
- V realitě se konflikty opakují.
- Např. konkurenční benzínové stanice na jedné ulici stanovují každý den nové ceny.
- Chovají se hráči v opakovaných konfliktech odlišně?
- Například nyní existuje možnost potrestat hráče za nedodržení dohody v kooperativní hře.

# Opakovaná hra (2)

- Mějme **jednokolovou** hru  $G$  v normální tvaru.
- Řada jednokolových her je sama o sobě také hrou, kterou označíme  $G^*$ . Tato hra je **opakovanou hrou** (v literatuře také označení superhra)
- **Akcí** je volba strategie v jednotlivém kole hry.
- **Strategie** v opakované hře označuje posloupnost **akcí** zvolených ve všech kolech opakované hry.
- Každý hráč má konečný **prostor akcí**, ze kterého je pak odvozen **prostor strategií**.

# Opakovaná hra (3)

- Opakovaná hra se hraje v kolech (okamžicích)  $t = 0, 1, \dots, T$ .
- Pozor! Čas začíná od nuly, takže celkový počet kol je  $T+1$ .
- **Profil akcí** označuje volby hráčů v daném kole.
- **Prostor profilů akcí** označuje všechny možné kombinace.
- Podle počtu kol rozlišujeme:
  - **Konečně opakované hry** ( $T < \infty$ )
  - **Nekonečně opakované hry** ( $T = \infty$ )

# Opakovaná hra (4)

## Předpoklady

- každý hráč má ve všech kolech hry stejný prostor akcí  $A_i$ , tedy  $A_i^t = A_i^{t+1}$ ;
- výplaty jsou ve všech kolech stejné, mohou být diskontovány;
- výplaty pro hráče závisí pouze na profilu akcí daného kola bez ohledu na to, které kolo hry se hraje;
- hráči volí své akce v každém kole hry současně;
- každý hráč zná akce, které uskutečnili ostatní hráči v předchozích kolech.

# Opakovaná hra (5)

- Hráči si pamatují minulé volby hráčů. Tuto paměť označujeme jako **historie**.
- Historie = realizované profily akcí v předchozích kolech.
- historie  $h^0$  je prázdná;
- historie  $h^t$  v sobě zahrnuje rovněž informaci o historiích  $h^{t-1}, h^{t-2}, \dots, h^0$ ;
- historii  $h^T$  označíme za **konečnou historii**, přičemž v nekonečně opakované hře má konečná historie nekonečnou délku ( $T = \infty$ );
- pozor, historie ve třetím hraném kole hry je  $h^2$ , neboť hra začíná v okamžiku nula.

# Opakovaná hra (6)

- Příkladem možné historie ve třetím hraném kole v opakované hře *kámen, nůžky, papír* je:  $h^2 = ((\text{kámen, nůžky}), (\text{papír, papír}))$ .
- **Prostor historií** = množina všech možných historií v opakované hře.
- Pokud budeme hrát *kámen, nůžky, papír* tři kola, bude existovat  $3 \times 3 \times 3 = 9$  možných historií.

# Opakovaná hra (7)

- **Profil strategií** = akce, které použijí hráči na základě informací o předchozích kolech, tedy  $s^t = (s_1(h^t), s_2(h^t), \dots, s_N(h^t))$ .
- **Prostor strategií** = množina všech strategií, které může hráč uskutečnit v opakované hře.
- **Prostor profilů strategií** = všechny profily strategií, které mohou ve hře nastat.
- Příkladem strategie v opakovaném vězňově dilematu:

$s_i(h^0) =$	spolupráce,
$s_i(h^t) = \{$	spolupráce, když $a_j^\tau =$ spolupráce, $j \neq i$ , pro $\tau = 0, 1, \dots, T-1$ ; podvod, když jinak.



# Diskontování výplat

- Výplatní funkce může být diskontována **diskontním faktorem  $\delta$**  ležícím v intervalu 0 až 1.
- Diskontní faktor je mírou **netrpělivosti** hráče – nižší hodnoty značí netrpělivého hráče, pro něhož má trest v budoucnosti malý význam.

- **Diskontovaný součet výplat** má tvar:

$$u_i = g_i(a^0) + \delta_i g_i(a^1) + \delta_i^2 g_i(a^2) + \dots = \sum_{t=0}^T \delta_i^t g_i(a^t)$$

- Diskontovaný součet lze nahradit **diskontovanou průměrnou výplatou**.

# Konečně opakované hry – vězňova dilema (1)

- V jednokolové hře je Nashova rovnováha (podvod, podvod).
- Vícekolová hra vězňovo dilema. Spolupráce by mohla vzniknout, protože je tu možnost trestat za volbu (podvod).

	Nepřiznat (spolupráce)	Přiznat (podvod)
Nepřiznat (spolupráce)	2; 2	0; 3
Přiznat (podvod)	3; 0	1; 1

# Konečně opakované hry – vězňova dilema (2)

- Podvod v posledním kole již není možné trestat.
- V konečně opakované hře vězňovo dilema existuje jediná Nashova rovnováha, ve které všichni hráči volí v každém kole podvod.

	Nepřiznat (spolupráce)	Přiznat (podvod)
Nepřiznat (spolupráce)	2; 2	0; 3
Přiznat (podvod)	3; 0	1; 1

# Nekonečně opakované hry – vězňova dilemma

- Na rozdíl od konečně opakovaných her neexistuje poslední kolo, podvod je vždy možné potrestat.
- Výsledek závisí na trpělivosti hráčů.
- Kdy platí (výplata při podvodu)  $\leq$  (výplata při spolupráci) ?

- Výběr mezi disk. prům. výplatou z řady:

- 3 1 1 1 1 ... (podvod)
- 2 2 2 2 2 ... (spolupráce)

	Nepřiznat (spolupráce)	Přiznat (podvod)
Nepřiznat (spolupráce)	2; 2	0; 3
Přiznat (podvod)	3; 0	1; 1