

# 5. Hry v rozvinutém tvaru

Martin Dlouhý  
VŠE v Praze

# „Tahové hry“

- V konfliktních situacích, popisovaných hrami v normálním tvaru (maticové hry), hráči realizují své strategie v **jednom časovém okamžiku**.
- Určité situace lze však lépe popsat jako **posloupnost tahů**, ve kterých hráči reagují na předchozí tahy protihráčů.
- Do této skupiny konfliktů patří i mnohé **salónní hry**, jako například šachy, dáma, go, mnoho karetních her či známá hra piškvorky.
- Pro modelování konfliktů, jež jsou charakterizovány řadou po sobě jdoucích tahů (rozhodnutí) používáme **hry v rozvinutém tvaru**, které jsou též známy pod názvem **hry v explicitním tvaru** či **tahové hry**.

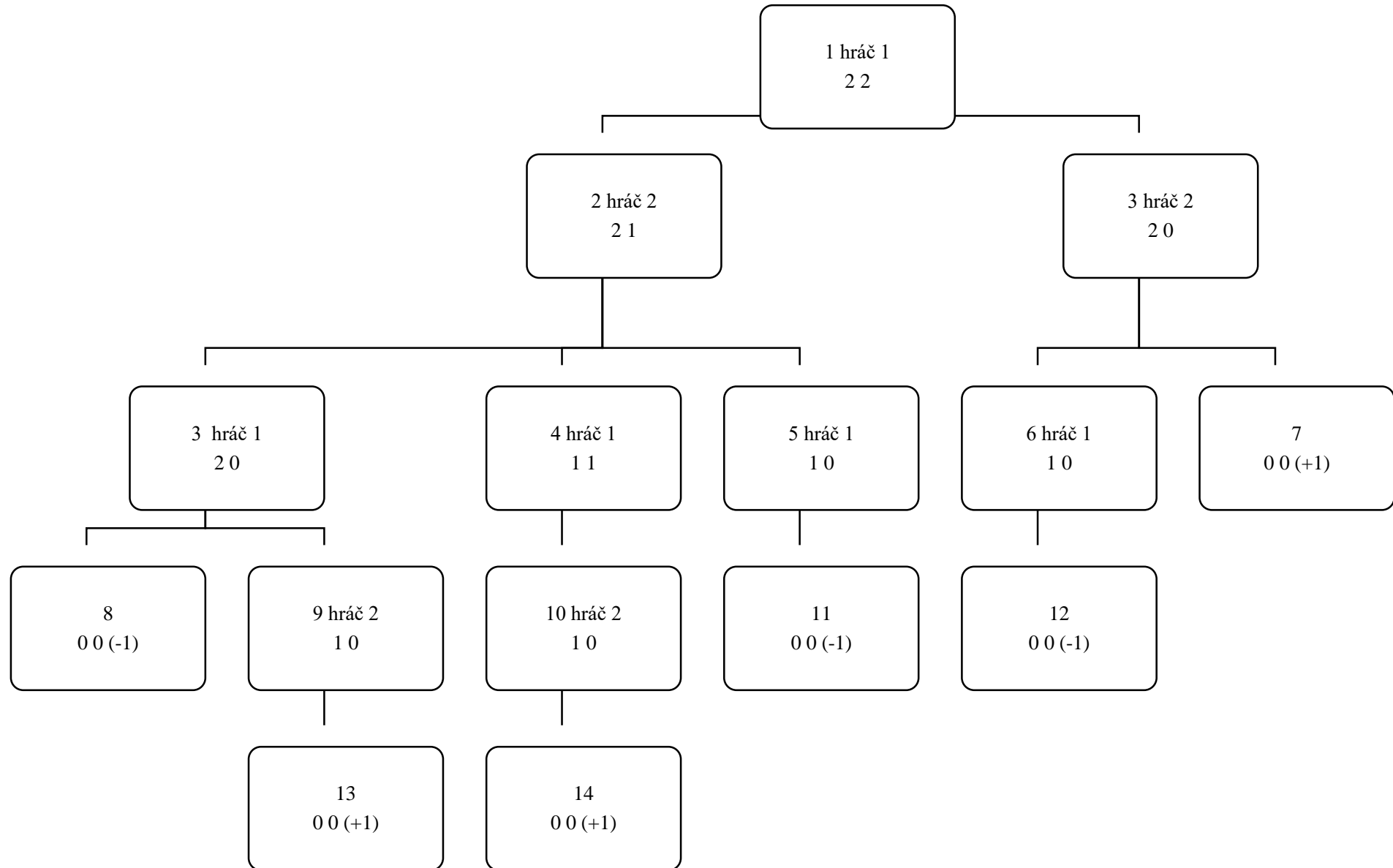
# Grafický model hry

- Hru v rozvinutém tvaru znázorníme pomocí speciálního grafu, tzv. **stromu hry**.
- Grafem rozumíme dvojici množiny **uzlů** a množiny **hran**.
- Strom je graf, který je souvislý, má jeden počáteční uzel, tzv. **kořen**, a zpravidla několik koncových uzlů, které reprezentují ukončení hry. Pokud je počet uzlů stromu  $n$ , pak je počet hran  $n - 1$ .
- Hráči se střídají a určují průběh hry v **rozhodovacích uzlech**. Rozhodovací uzly reprezentují volbu hráče mezi pro něj dostupnými alternativami (tahy) v dané fázi hry.

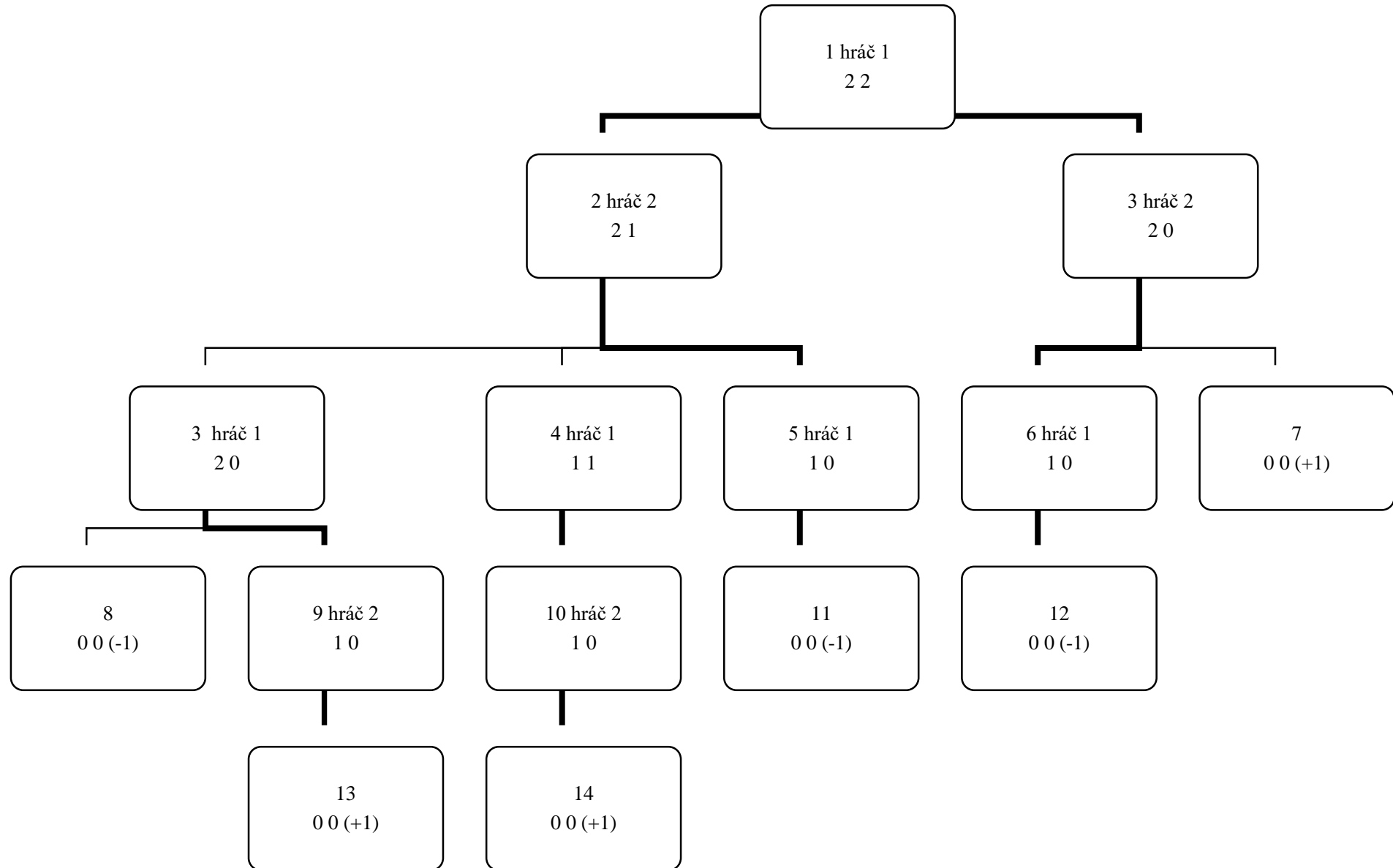
# Hra NIM

- Začneme s rozbořem hry NIM, která patří mezi nejjednodušší tahové hry.
- Hru NIM může hrát libovolný počet hráčů.
- Předpokládejme pro dva hráče, kteří se střídají a odebírají herní kameny rozdělené do hromádek.
- Pravidla:
  - konečný počet kamenů je rozdělen na hromádky;
  - hráč může odebrat libovolný počet kamenů, avšak vždy alespoň jeden a kameny musí být pouze z jedné hromádky;
  - hráč, který byl nucen odebrat poslední kámen ve hře, prohrál.

# Hra NIM 2x2



# Hra NIM 2x2



# Řešení

- Řešení hry dostaneme **zpětnou indukci**, tj. začneme analýzu v rozhodovacích uzlech v posledních tazích.
- Hru rozložíme na tzv. **podhry**, což jsou části hry, které jsou rovněž samostatnými hrami.
- Řešením je **dokonalá rovnováha podhry** (subgame perfect equilibrium), která na rozdíl od Nashovy rovnováhy, popisuje rovnovážné strategie hráčů ve všech možných herních situacích.
- **Definice:** Dokonalá (Nashova) rovnováha podhry je taková rovnováha hry v rozvinutém tvaru  $\Gamma$ , ve které strategie hráčů tvoří Nashovu rovnováhu ve všech podhrách původní hry  $\Gamma$ .

# Ruská ruleta

- Životu nebezpečnou hrou je Ruská ruleta.
- Předpokládejme dva hráče (šlechtický původ a opilost výhodou), kteří se rozhodli řešit spor o jistou atraktivní dámu pomocí šestiranného revolveru s jediným ostrým nábojem v zásobníku.
- Náboj je v zásobníku umístěn náhodně a hráči neznají jeho umístění.
- Hráč na tahu může s hanbou odstoupit ze hry nebo se zachovat jako pravý šlechtic a pozvednout revolver ke své hlavě a zmáčknout spoušť. Strategie „střílet“ vede k okamžité smrti nebo k radostnému předání revolveru protihráči.
- Ruská ruleta obsahuje **náhodný tah**, neboť hráč nezná výsledek strategie „střílet“. Tento tah jakoby udělal třetí hráč - příroda. Při předpokladu náhodnosti umístění náboje v zásobníku můžeme pracovat s pravděpodobnostmi obou variant.



# Dáma (draughts, checkers)

- Různé verze hry – dáma česká, anglická, kanadská, mezinárodní,...
- Např. deska 12x12, 10x10, 8x8, různá pravidla pro skákání atd.
- V anglické dámě se odhaduje  $5 \times 10^{20}$  možných pozic.
- M. F. Tinsley – za 45 let kariéry prohrál pouze sedm mistrovských partií anglické dámy (z toho 2 s počítačovým programem Chinook).
- Od roku 1996 je Chinook neporazitelný.
- Schaeffer a kol. (2007) oznamuje vyřešení dámy po 18 letech výpočtů. Bezchybná hra obou hráčů končí remízou.

# Šachy

- Hra šachy je ve srovnání s hrou NIM mnohem složitější. Již po prvním tahu obou hráčů může nastat 400 různých pozic, tj. uzlů ve stromu hry.
- Klíčovým problémem při rozboru hry je tedy **astronomický počet variant**, který znemožňuje sestavení stromu hry. Počet možných pozic se odhaduje někde mezi  $10^{40}$  až  $10^{50}$ .
- Z teoretického hlediska jsou šachy stejně nudná hra jako NIM, protože již před začátkem hry by hráči měli vědět výsledek!
- Zásadní rozdíl je v tom, že se nikomu nepodařilo výsledek šachové hry vypočítat. Počítače nejsou dostatečně rychlé a v dohledné době ani nebudou.

# Šachy

- Zásadní význam pro analýzu šachové hry má věta: Každá konečná hra v rozvinutém tvaru s dokonalou informací má řešení v ryzích strategiích.
- Šachy lze modelově popsat **hrou v rozvinutém tvaru**.
- Šachy jsou **hrou s dokonalou informací**, neboť každý hráč zná pozici na šachovnici. Jinými slovy, hráč ví, ve kterém uzlu se hra nachází. To neplatí v karetních hrách, kde obvykle neznáme karty protihráče, takže neznáme přesnou pozici, ve které se hra nachází. Typické karetní hry jsou proto hry s nedokonalou informací.
- Hra v rozvinutém tvaru je **hra konečná**, když má konečný počet tahů a v každém tahu má hráč k dispozici konečný počet strategií. To je u šachů splněno, neboť nekonečné opakování tahů není pravidly povoleno. Podle pravidel znamená třikrát opakovaná pozice ukončení hry a prohlášení partie za remízu.

# Šachy

Víme, že platí jedna z těchto možností:

1. bílý má vítěznou strategii (první na tahu vyhraje);
2. černý má vítěznou strategii (první na tahu prohraje);
3. hra skončí remízou.

Nevíme, která z uvedených možností je pravdivá, protože neznáme strom hry.

Zkušenosti však ukazují, že bílý hráč prvním tahem získává určitou výhodu, takže vítězná strategie černého je nepravděpodobná.

# Šachy a počítače

- Jak počítače hrají šachy, když neznají strom hry? Kdyby ho znaly, šachy by jako hra skončily, protože počítače by byly neporazitelné.
- Počítačové programy konstruuují pouze části stromu hry a prohledají „blízké“ okolí současné pozice na šachovnici.
- Jelikož částečné stromy hry neobsahují koncové uzly, není možné přímo zjistit výsledek hry, takže je nutné pozice (uzly stromu) hodnotit pomocí uměle vytvořených **ohodnocovacích funkcí**.
- Ohodnocovací funkce číselně ohodnotí každou herní pozici z hlediska materiálního a z hlediska pozičního.
- Materiální hledisko zahrnuje počet figur obou hráčů, přičemž se používají různé přepočty, například dáma rovná se devíti pěšcům, věž se rovná pěti pěšcům atd. Poziční hledisko zohledňuje postavení figur, například hodnota pěšce se zvyšuje jeho postupem k poslední řadě, kde může být pěšec proměněn v dámu.
- Počítač zvolí strategii zajišťující přesun na pozici s nejvyšším ohodnocením.

# Hra ultimátum

- První hráč libovolně rozdělí dolar. Částku  $x$  pro sebe. Částku  $1-x$  pro druhého hráče.
- Druhý hráč navržené rozdělení  $(x, 1-x)$  přijme, nebo odmítne. V případě odmítnutí dostanou oba dva hráči nulu.
- Je odmítnutí rozdělení  $(0,8; 0,2)$  racionální?
- Využití hry ultimátum v experimentální ekonomii.