4. Vězňovo dilema, kooperativní hry, grafické řešení

Martin Dlouhý

VŠE v Praze

Co víme z předchozí přenášky?

- Ve hře s NKS existují vždy smíšené rovnovážné strategie.
- Počet rovnováh může být jedna až nekonečně mnoho.
- Hodnoty výplat v různých rovnováhách jsou různé.
- Problém výběru rovnováhy je jednodušší, pokud jsou některé rovnováhy dominované.
- Hry s KS jsou speciálním případem her s NKS.

Vězňovo dilema

Název hry je odvozen od modelové situace, ve které dva vězni, kteří spáchali určitý zločin, jsou odděleně uvězněni a mají možnost se *přiznat* (*P*) či *nepřiznat* (*NP*).

- Pokud se jeden z vězňů přizná a druhý nikoliv, je prvnímu vězni udělen nižší trest a druhému naopak vyšší trest.
- Jestliže se nepřiznají, nebudou plně usvědčeni, takže dostanou menší trest.
- Když se oba přiznají, tak na sebe vzájemně sdělí důkazy a čeká je vyšší trest.

Možný model hry vězňovo dilema (záporné hodnoty reprezentují roky vězení)

$$\begin{array}{c} P \\ NP \end{array} \begin{bmatrix} -3\,;-3 & -1-4 \\ -4\,;-1 & -2\,;-2 \end{bmatrix}$$

Možný model hry vězňovo dilema (záporné hodnoty reprezentují roky vězení)

$$\begin{array}{c} P \\ NP \end{array} \begin{bmatrix} (-3)\,;[-3] & (-1);-4 \\ -4\,;[-1] & -2\,;-2 \end{bmatrix}$$

1. Nashova rovnováha není paretovsky efektivní. Existuje lepší řešení (-2; -2), které však není rovnovážné.
2. Lze úlohu změnit využitím věrohodné hrozby?

Manželský spor (Battle of Sexes)

Manželé se dnes večer chtějí sejít (nemají mobilní telefony).
1 bod dostane každý, když budou večer spolu. 0 bodů když se nesetkají.
1 bod navíc dostane ten, když setkání odpovídá jeho preferencím (manžel preferuje kopanou, manželka nákupy).

$$\begin{array}{ccc} & & manželka \\ manžel & \begin{array}{c} kopaná \\ nákupy \end{array} & \begin{bmatrix} 2;1 & 0;0 \\ 0;0 & 1;2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ústřední (ohniskové body) jako možnost řešení v případě vícenásobných rovnováh

Thomas C. Schelling – tzv. focal points – pozornost hráčů je přitahována k určitému řešení, například tady jsme zapomenuli závorky.

Kde se potkáte na Václavském náměstí?

$$\begin{array}{ccc} & & manželka \\ manžel & \begin{array}{r} kopaná \\ nákupy \end{array} & \begin{bmatrix} 2;1 & 0;0 \\ 0;0 & (1);(2) \end{bmatrix} \end{array}$$

Kooperativní a nekooperativní řešení

Tři typy konfliktních situací:

- Nekooperativní hra
- Dohoda o strategiích – hra s nepřenosnou výhrou (výplatou)
- Dohoda o rozdělení výplat – hra s přenosnou výhrou (výplatou)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

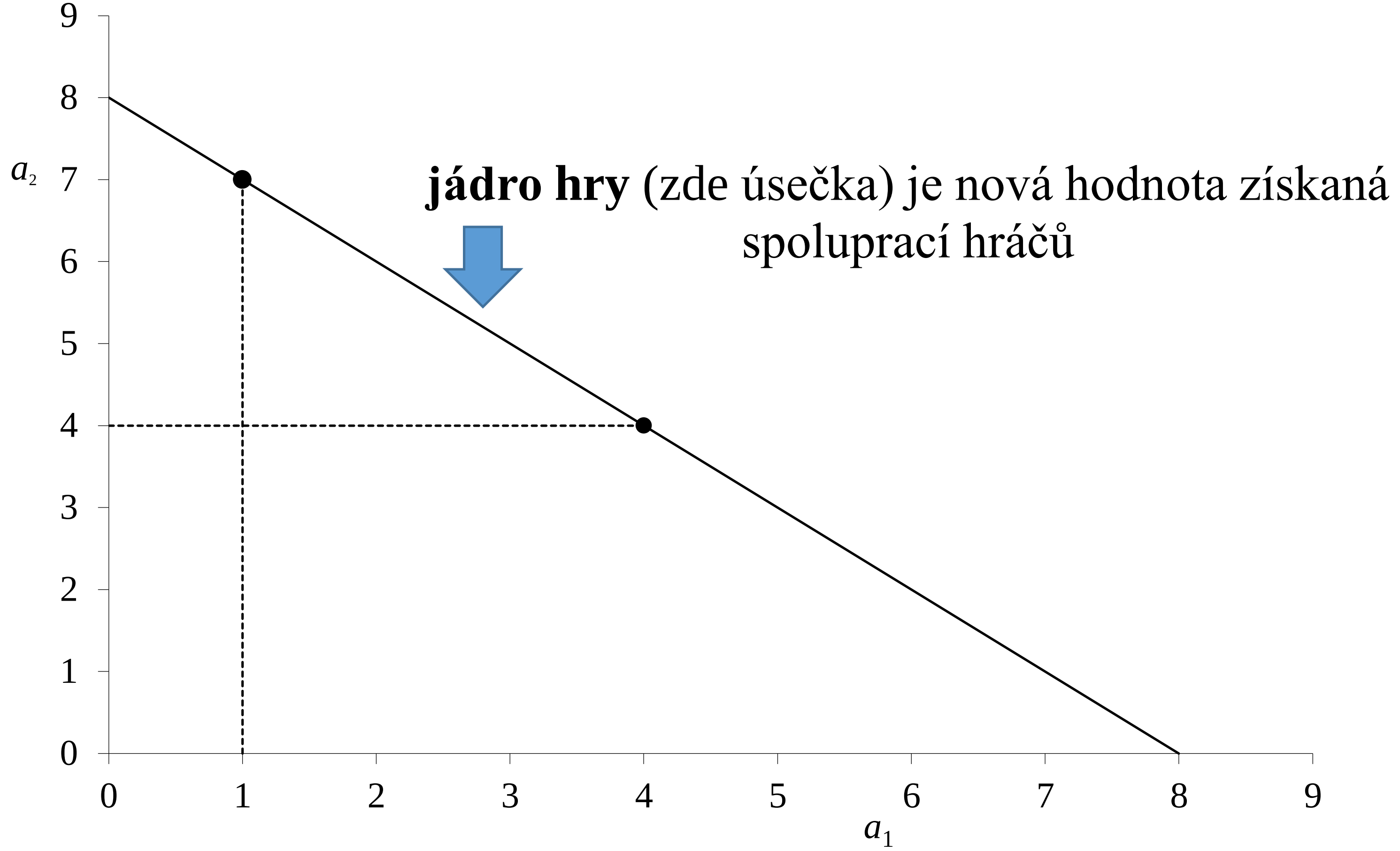
Rovnováha v nekooperativní hře (1,4).

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Grafické znázornění jádra hry

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zaručené výplaty hráčů jsou dány rovnováhou v nekooperativní hře (1,4).

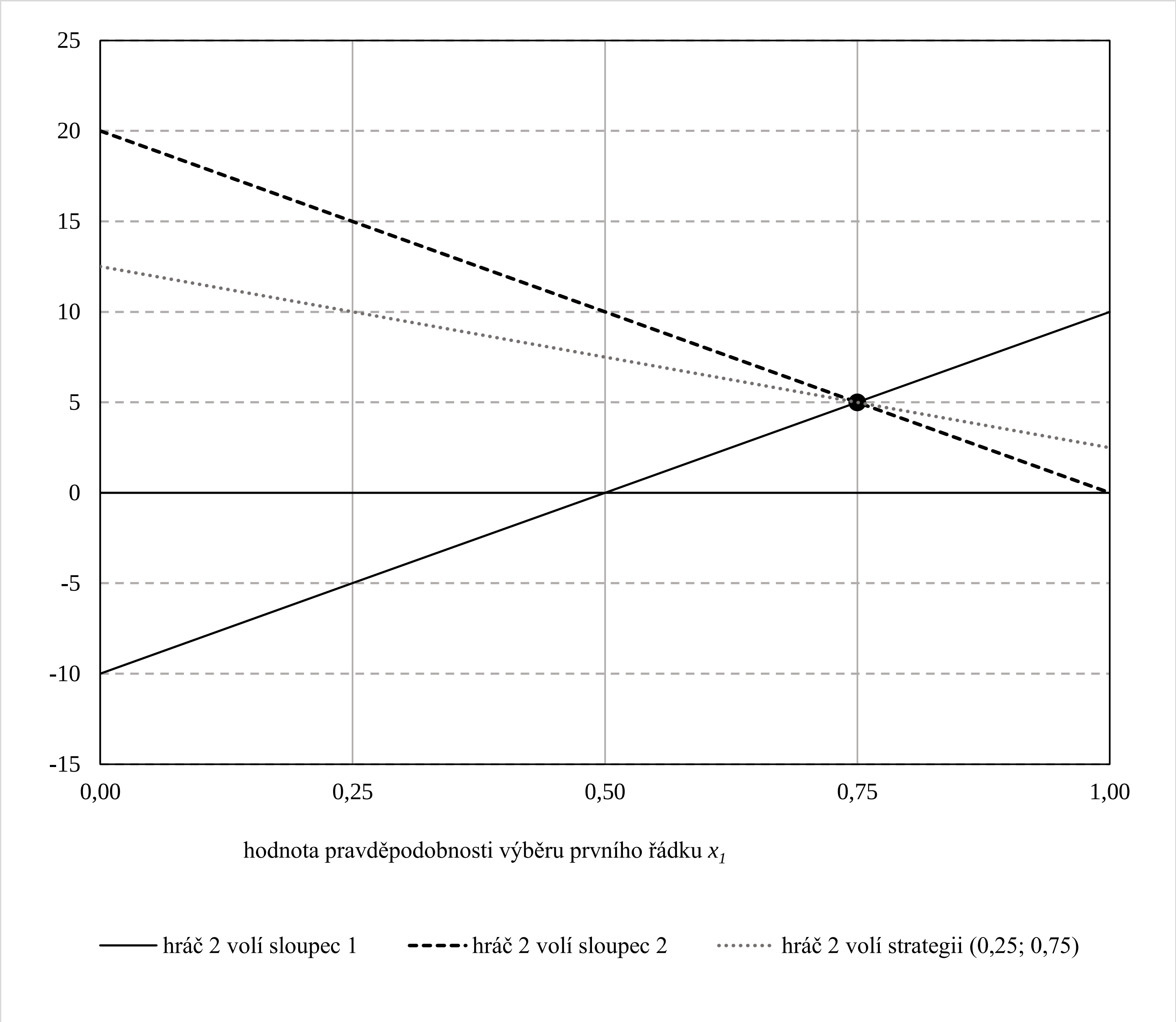


Grafické řešení maticových her (konstantní součet)

- uvažujme hru s konstantním součtem 2x2
- strategie hráče 1 jsou x_1 a x_2 a strategie hráče 2 jsou y_1 a y_2
- součet pravděpodobností je roven jedné (x_2=1-x_1) a (y_2=1-y_1)
- když hráč 2 volí sloupec 1, výplata hráče 1 je -10 až 10 podle x_1
- když hráč 2 volí sloupec 2, výplata hráče 1 je 0 až 20 podle x_1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}$$

Grafické řešení pro prvého hráče



Výpočet rovnovážných strategií

Odpovídající smíšené strategie a výplatu prvého hráče vypočítáme jako souřadnice průsečíku dvou úseček výplat ze soustavy rovnic:

$10x_1 - 10\,(1 - x_1) = v,$

$20\,(1 - x_1) = v,$

po úpravě

$20x_1 - 10 = v,$

$-20x_1 + 20 = v,$

a odtud získáme smíšené strategie prvého hráče $x_1 = 0{,}75$, $x_2 = 0{,}25$ a $v = 5$.

Nyní opakujeme daný postup pro druhého hráče.