3. Hra s nekonstantním součtem

Martin Dlouhý

VŠE v Praze

Co víme z předchozí přenášky?

- Ve hře s konstantním součtem existují vždy smíšené rovnovážné strategie.
- Rovnováh může být od jedné až do nekonečna, vždy však mají stejnou hodnotu výplat pro hráče.
- Hru lze zjednodušit vynecháním silně dominovaných strategií. Tím nemůže ztratit žádnou rovnováhu.

Hra s nekonstantním součtem

- Nemusí platit, že co jeden vyhraje, druhý musí nutně prohrát.
- Například reklamním bojem si firmy mohou vzájemně pomáhat, protože propagují výrobek jako takový (např. mobilní telefony apod.)
- Protože zájmy hráčů nemusejí být v protikladu může vzniknout i kooperace.
- Rozlišujeme proto kooperativní a nekooperativní teorii.

Hra s nekonstantním součtem (dva hráči)

- Existuje výplatní matice prvého hráče **A**
- Existuje výplatní matice prvého hráče **B**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Bimaticová hra (dvoumaticová hra) jako model HNKS a její řešení

$$\begin{bmatrix} (7);[9] & -2;1 \\ -2;0 & (6);[4] \end{bmatrix}$$

Co můžeme říci o vztahu dvou nalezených rovnováh v ryzích strategiích?

Bimaticová hra (dvoumaticová hra) jako model HNKS a její řešení

$$\begin{bmatrix} (3);[9] & -2;1 \\ -2;0 & (6);[4] \end{bmatrix}$$

Co můžeme říci o vztahu dvou nalezených rovnováh v ryzích strategiích?

Bimaticová hra (dvoumaticová hra) jako model HNKS a její řešení

$$\begin{bmatrix} 3;[5] & (2);-1 \\ (4);1 & -2;[5] \end{bmatrix}$$

Nashova rovnovážná řešení ve dvoumaticových hrách

- Rovnovážné řešení (ryzí nebo smíšené) je jediné. Představuje jednoznačný návod k optimálnímu jednání pro oba hráče.
- Rovnovážných řešení je více, avšak jedno z rovnovážných řešení je pro oba hráče výhodnější než ostatní řešení (dané rovnovážné řešení dominuje ostatní řešení). Hráči tedy zvolí pro oba nejvýhodnější rovnovážné řešení.
- Rovnovážných řešení existuje ve hře více a alespoň dvě z nich jsou nedominovaná. Hráči v tomto případě nemají jednoznačný návod k tomu, které rovnovážné řešení zvolit, neboť každý hráč preferuje jiné rovnovážné řešení.

Co víme o řešení dvoumaticových her?

Věta: Každá dvoumaticová hra s výplatními maticemi **A** a **B** má nejméně jedno rovnovážné řešení dané dvojící vektorů ($\mathbf{x}^o$, $\mathbf{y}^o$). /John Nash/

Nalezení řešení dvoumaticové hry

Věta o ekvivalenci. Nutnou a postačující podmínkou pro dvojici vektorů **x** a **y** proto, aby představovaly Nashovu rovnováhu ve dvoumaticové hře je, že tyto vektory jsou řešením následující úlohy:

Maximalizovat $\mathbf{x}^{T}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{y} - v - w$;

za podmínek

$\mathbf{A}\mathbf{y} \leq v\mathbf{e}$; $\mathbf{B}^{T}\mathbf{x} \leq w\mathbf{f}$;

$\mathbf{e}^{T}\mathbf{x} = \mathbf{1}$; $\mathbf{f}^{T}\mathbf{y} = \mathbf{1}$;

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$; $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$;

kde hodnoty proměnných *v* a *w* jsou rovnovážné výplaty prvého a druhého hráče. Pro účelovou funkci v optimálním řešení platí, že:

$\mathbf{x}^{\mathbf{0}T}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{y}^{\mathbf{0}} - v^{0} - w^{0} = 0.$

(Mangasarian a Stone, 1964)

Hra kuře

- Dva opilí mladíci jedou proti sobě v autech. Kdo jako první uhne, tak prohraje. Když neuhne nikdo, tak se zřejmě zabijí při autohavárii. Když uhnou oba ve stejný okamžik, tak je to remíza.

$$\begin{array}{c} U \\ N \end{array} \begin{bmatrix} 0;0 & (-5);[5] \\ (5);[-5] & -10;-10 \end{bmatrix}$$