2. Hra v normálním tvaru, hra s konstantním součtem

Martin Dlouhý

VŠE v Praze

Co už víme z první přenášky?

- Teorie her se zabývá studiem konfliktních či kooperativních rozhodovacích situací s více účastníky.
- Teorie her využívá pro zachycení konfliktních či kooperativních rozhodovacích situací matematický aparát.
- Základním modelem je zobrazení hry ve formě matice.
- Řešením hry je nalezení Nashovy rovnováhy.

Hra v normálním tvaru

- Množina hráčů **N** = {*1*, *2*,…, *N*}
- Množina prostorů strategií **X** = $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$
- Množina výplatních funkcí **F** = $\{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N), \ldots, f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)\}$

- **Definice** – Hra Γ je v normálním tvaru, pokud je určena trojicí množin (**N**, **X**, **F**), kde **N** je neprázdná množina hráčů, **X** = $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ je množina prostorů strategií a **F** = $\{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N), \ldots, f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)\}$ je množina výplatních funkcí.

- Poznámka: pro dva hráče zjednodušujeme značení na X a Y.

Hra s konstantním součtem

- $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) + f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N) = K$
- $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) + f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0$ (hra s nulovým součtem)

- Jedná se o tzv. antagonistický konflikt. Jeden hráč může získat pouze to, co druhý hráč ztratí.

Hra s konstantním součtem
(příklad z minulé přednášky)

Hráč 2		**1**	**2**	**3**	**4**
	1	**4**	**4**	**3**	**5**
Hráč 1	**2**	**5**	**7**	**2**	**-1**
	3	**-12**	**6**	**-2**	**4**

Dominované strategie

- Hru lze zjednodušit vyřazením silně dominovaných strategií (tedy snížením počtu řádků a sloupců).
- Při vyřazení slabě dominované strategii můžeme přijít o rovnovážné řešení, pokud jich existuje více.

Dominující strategie, silně dominovaná strategie

Racionální druhý hráč nikdy nezvolí druhý sloupec

Hráč 2		1	2	3	4
	1	4	4	3	5
Hráč 1	2	5	7	2	-1
	3	-12	6	-2	4

Krok 2

Dominující strategie, silně dominovaná strategie

Racionální první hráč nikdy nezvolí třetí řádek

Hráč 2		1	2	3	4
	1	4		3	5
Hráč 1	2	5		2	-1
	3	-12		-2	4

Krok 3

Dominující strategie, silně dominovaná strategie

Racionální druhý hráč nikdy nezvolí první sloupec

Hráč 2		1	2	3	4
	1	**4**		**3**	**5**
Hráč 1	**2**	**5**		**2**	**-1**
	3				

Krok 4

Dominující strategie, silně dominovaná strategie

Racionální druhý hráč nikdy nezvolí první sloupec

Hráč 2		1	2	3	4
	1			3	5
Hráč 1	**2**			2	-1
	3				

Krok 5
Dominující strategie, silně dominovaná strategie
Druhý hráč nikdy nezvolí čtvrtý sloupec

Hráč 2		**1**	**2**	**3**	**4**
	1			3	5
Hráč 1	**2**				
	3				

Řešení se shoduje s Nashovou rovnováhou, ale je to pouze náhoda v tomto konkrétním případě.

první hráč (min v řádku)

druhý hráč (max ve sloupci, jsme totiž v matici prvého hráče)

	Hráč 2	**1**	**2**	**3**	**4**
	1	**4**	**4**	**(3 / 3)**	**5**
Hráč 1	**2**	**5**	**7**	**2**	**-1**
	3	**-12**	**6**	**-2**	**4**

Sedlový prvek matice (Nashova rovnováha)

Mohou nastat následující tři případy:

1. Matice má jeden sedlový prvek (prvek představuje Nashovu rovnováhu v ryzích strategiích).

2. Matice má více sedlových prvků, jejichž hodnoty jsou si rovny. Tyto sedlové prvky určují alternativní rovnovážné strategie. Je lhostejno, které řešení hráč zvolí, jeho výplata bude stejná.

3. Matice nemá žádný sedlový prvek, rovnovážné strategie se nám daným postupem nepodařilo najít.

Hra kámen, nůžky, papír – nenajdeme sedlový prvek, takže co dál?

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \textit{kámen} & \textit{nůžky} & \textit{papir} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{kámen} \\ \textit{nůžky} \\ \textit{papir} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Věta o minimaxu (základní věta maticových her)

- Pro každou maticovou hru určenou maticí **A** existují dva vektory **x** a **y**, pro které platí: $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}$.

- Jinými slovy: Každá maticová hra (tedy hra s konstantním součtem) má řešení ve smíšených strategiích /von Neumann, 1928/.

- Smíšené strategie = pravděpodobnostní strategie.

Nerovnosti Nashovy rovnováhy

- Platí též tyto nerovnosti, které vyjadřují, že hráč nemůže získat, když se odchýlí od Nashovy rovnováhy

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^{\mathrm{o}} \leq \mathbf{x}^{\mathrm{oT}}\mathbf{A}\mathbf{y}^{\mathrm{o}} \leq \mathbf{x}^{\mathrm{oT}}\mathbf{A}\mathbf{y}$$

Určení strategií prvého hráče

Maximalizovat v

za podmínek

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq v;$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq v;$$

$$\dots$$

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq v;$$

$$x_1 + x_2 + ...+ x_m = 1;$$

$$x_i \geq 0; \ \ i = 1, 2 ,..., m;$$

$$v \geq 0;$$

Určení strategií druhého hráče

Minimalizovat v

za podmínek

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le v;$$

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le v;$$

$$\dots$$

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le v;$$

$$y_1 + y_2 + ...+ y_n = 1;$$

$$y_j \ge 0; \quad j = 1, 2 ,..., n;.$$

$$v \ge 0.$$

Jiná formulace pro prvého hráče

Minimalizovat $p_1 + p_2 + ...+ p_m$

za podmínek

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \geq 1;$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{m2}p_m \geq 1;$$

$$\dots$$

$$a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_m \geq 1;$$

$$p_i \geq 0; \; i = 1, 2 , ..., m;$$

Jiná formulace pro druhého hráče

Maximalizovat $q_1 + q_2 + \ldots\ldots\ldots + q_n$

za podmínek

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \leq 1;$$

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \leq 1;$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_\mathrm{n} \leq 1;$$

$$q_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$