Kap. 4.2: Přesnost odhadů, metody redukce rozptylu

Martin Dlouhý

2019

Přesnost výsledků

- Otázka při plánování experimentů: kolik hodnot je třeba získat, abychom získali dostatečně přesné odhady výstupních parametrů?
- Počet hodnot (výběrový soubor) = počet replikací, počet entit, které prošly celým systémem).
- Pokud bude počet hodnot nedostatečný, nezískáme na dané úrovni statistické významnosti dostatečně „úzký“ interval spolehlivosti.
- Místo stanovení počtu hodnot k stanovme nejprve požadovanou přesnost d.

Přesnost výběrového průměru (absolutní hodnota)

- Odhad při zadání přesnosti *d* v absolutní hodnotě (poloviční šířka intervalu spolehlivosti)
- Nutno získat předem odhad hodnoty výběrového rozptylu s^2.

$$d \geq t_{1-\alpha/2,\, k-1} \frac{s}{\sqrt{k}}$$

$$s^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2$$

$$k \geq \frac{t^2 s^2}{d^2}$$

Hodnoty rozdělení *t*:

1,960 pro 95% interval spolehlivosti,

2,576 pro 99% interval spolehlivosti.

Přesnost výběrového průměru (relativní hodnota)

- Odhad při zadání přesnosti *d* jako relativní hodnoty směrodatné odchylky s. (např. polovina s)
- Není třeba odhad hodnoty výběrového rozptylu s^2.
- Jelikož je však d vyjádřena jako podíl neznámé hodnoty s, tak neznáme skutečnou šířku intervalu spolehlivosti.
- Srovnej absolutní a relativní vyjádření přesnosti:

$$k \geq \frac{t^2 s^2}{d^2} \qquad k \geq \frac{t^2 s^2}{(ds)^2} = t^2 / d^2$$

Přesnost výsledků při odhad podílu

- Proměnná má hodnotu nula či jedna (výrobek je v pořádku, výrobek vadný, obslužná linka pracuje-nepracuje).
- Výsledek je odhad procentního využití linky (pravděpodobnost, že nepracuje), procenta vadných výrobků (p-st, že výrobek je vadný).

$$p \pm t_{1-\alpha/2,\,k-1} \sqrt{p(1-p)/k}$$

- Musíme ovšem znát odhad p.
- Po vyřešení výrazu pro hodnotu k dostaneme (pozor chyba v učebnici):
- Chybně: $k = t^2 p(1-p) / d$
- Správně: $k = t^2 p(1-p) / d^2$

Přesnost výsledků při odhad podílu (2)

- Nevýhodou postupu je potřeba odhadu p.
- Můžeme využití znalosti, že maximální hodnota výrazu **p(1-p)** může být **0,25** při hodnotě **p=0,5**.
- Původní odhad velikosti výběrového souboru: $k = t^2 p(1-p) / d^2$
- Nová hodnota bude $\mathbf{0{,}25t^2/d}$, která zajistí větší velikost výběrového souboru než je nutné.
- Není třeba provádět pilotní simulační běh.

Přesnost výsledků při odhad podílu (3)

Příklad:

- Žádáme spolehlivost na úrovni 95 %, čili t = 1,96.
- Žádáme přesnost ve formě poloviční šíře intervalového odhadu d = 0,05.
- k= **$0{,}25t^2/d^2$ = 0,25 x 3,8416 / 0,0025 = 384,16.**
- Tedy 385 hodnot by mělo být dostatečný počet pro jakoukoli hodnotu p.

Přesnost výsledků rozdílu mezi průměry

- Porovnáváme například dvě různé varianty nastavení systému.
- Získáme odhad průměry x_1 a x_2 a požadujeme velmi přesný odhad jejich rozdílu.
- Hodnota d je polovina šířky intervalu spolehlivosti pro odhad rozdílu mezi průměry.
- Velikost výběrového souboru $k = t^2 (s_1{}^2+s_2{}^2)/d^2$.
- Hodnota k je shodná pro variantu 1 a 2.

Metody redukce rozptylu

- Cílem redukce rozptylu je rychleji se dostat k přesnějším výsledkům (k dostatečně úzkému intervalovému odhadu).
- Možnost redukce rozptylu vyplývá z možnosti analytika mít pod kontrolou generování náhodných veličin.

Příklady metod redukce rozptylu s kontrolou náhodných veličin:

1. Metoda společných náhodných čísel
2. Metoda stratifikovaných výběrů
3. Metoda protikladných veličin

Metoda společných náhodných čísel

- Při hodnocení dvou variant A a B jsou rozdíly dány:
  - Systémovou složkou – skutečný rozdíl ve výkonnosti variant (běžec A je lepší než B)
  - Náhodnou složkou – vliv náhody, ten se snažíme eliminovat (jak fouká vítr)
- Mějme náhodné veličiny X a Y, které popisují výkonnost systému při variantách A a B.
- Pro rozptyl náhodných veličin platí $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\, cov(X,Y)$
- Při společném proudu náhodných čísel ve variantách A a B je $cov(X,Y)$ kladná $\rightarrow$ při zkoumání rozdílu variant Z je celkový rozptyl menší: platí $D(Z) = D(X-Y) = D(X) + D(Y) - 2\, cov(X,Y)$.