

Kap. 2.2: Modelování variability procesů

Generování hodnot spojitých náhodných veličin

Martin Dlouhý
2019

Náhodný pokus, náhodná veličina

- **Náhodný pokus** je pokus, který může být opakován a jehož výsledek není znám předem. Náhodným pokusem je například hod kostkou.
- **Náhodná veličina** je veličina, jejíž hodnota je dána výsledkem náhodného pokusu.
- **Rozdělení** je pravidlo, jež každé hodnotě nebo intervalu hodnot přiřadí pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude této hodnoty nebo hodnoty z tohoto intervalu.
- **Distribuční funkce** náhodné veličiny $F(x)$ přiřazuje každému reálnému číslu pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty menší nebo rovné x . Pro každé reálné x je distribuční funkce neklesající a pro x platí $0 \leq F(x) \leq 1$.
- **Hustota pravděpodobnosti** spojité náhodné veličiny je funkce $f(x) = dF(x)/dx$. Integrál funkce je roven jedné.
- **Pravděpodobnostní funkce** diskrétní veličiny je definována $f(x_i) = P(X=x_i)$. Hodnoty funkce jsou nezáporné a jejich součet je roven jedné.
- **Střední hodnota** $E(x)$ je charakteristikou polohy.
- **Rozptyl** $D(x)$ charakterizuje variabilitu hodnot NV.

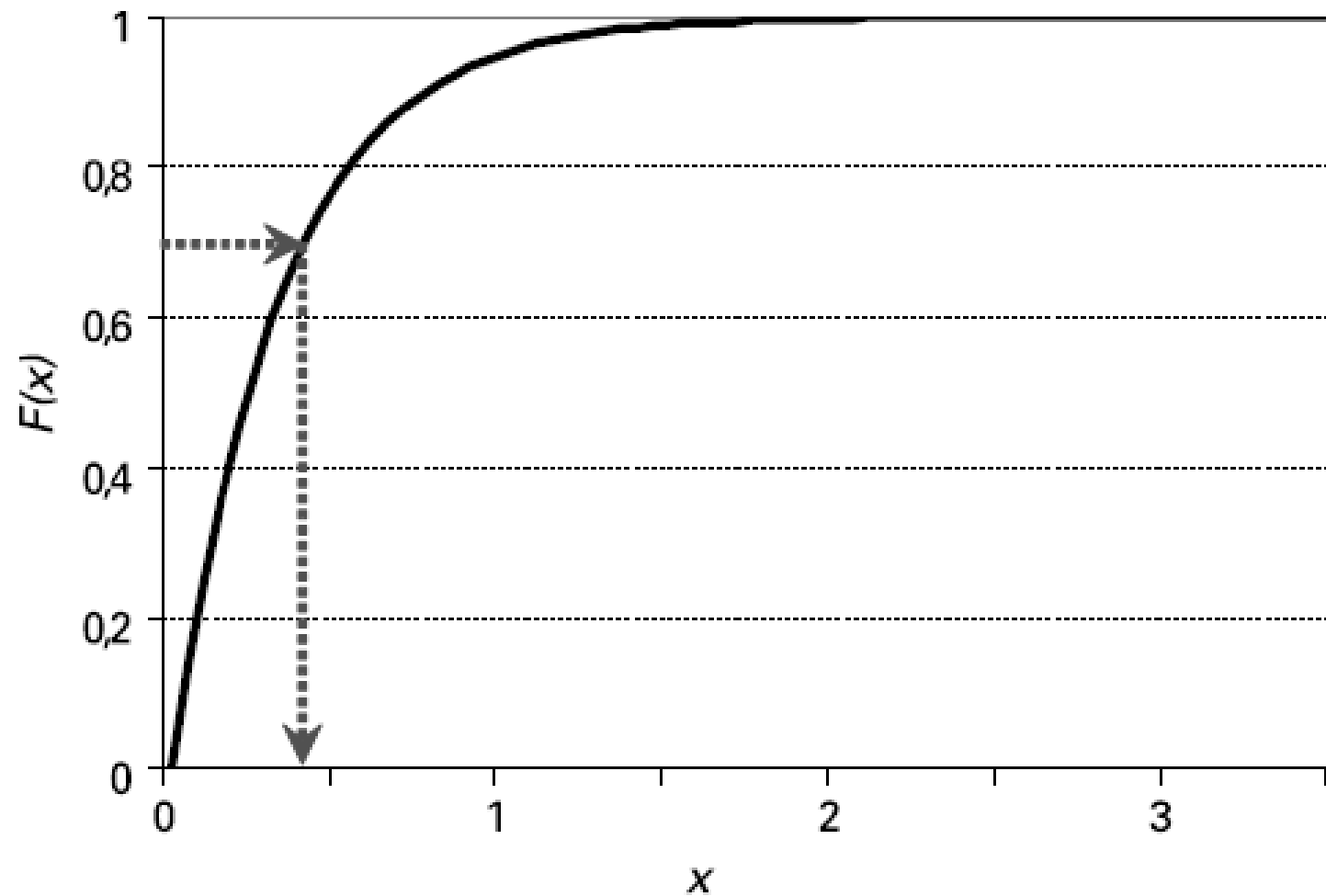
Metoda zamítací

1. Předpokládejme, že hustota pravděpodobnosti NV je ohraničena na intervalu $[a, b]$.
2. Pro všechna x platí, že $f(x)$ je menší než hodnota c .
3. Generujme rovnoměrné rozdělené body o souřadnicích (x, y) z obdélníku $[a, b] \times [0, c]$.
4. Testujme, zda platí $y \leq f(x)$. Pokud ano, považujeme x za hodnotu dané NV, pokud ne, x zamítneme a generujeme další bod.

Metoda inverzní transformace (1)

1. Mějme náhodnou veličinu X se spojitou a rostoucí distribuční funkcí $F(x)$ na intervalu (a, b) .
2. Existuje vzájemně jednoznačné přiřazení hodnot x z intervalu (a, b) a r z intervalu $(0, 1)$, které je dané předpisem $r=F(x)$.
3. Vygenerováním náhodného čísla r určíme hodnotu $x=F^{-1}(r)$, která má požadované rozdělení. F^{-1} je inverzní funkce.

Metoda inverzní transformace (2)



Rovnoměrné rozdělení (1)

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = 1/(b-a) \quad \text{pro } x \in (a, b),$$

$$f(x) = 0 \quad \text{jinak.}$$

Distribuční funkce:

$$F(x) = 0 \quad \text{pro } x \leq a,$$

$$F(x) = (x-a)/(b-a) \quad \text{pro } x \in (a, b),$$

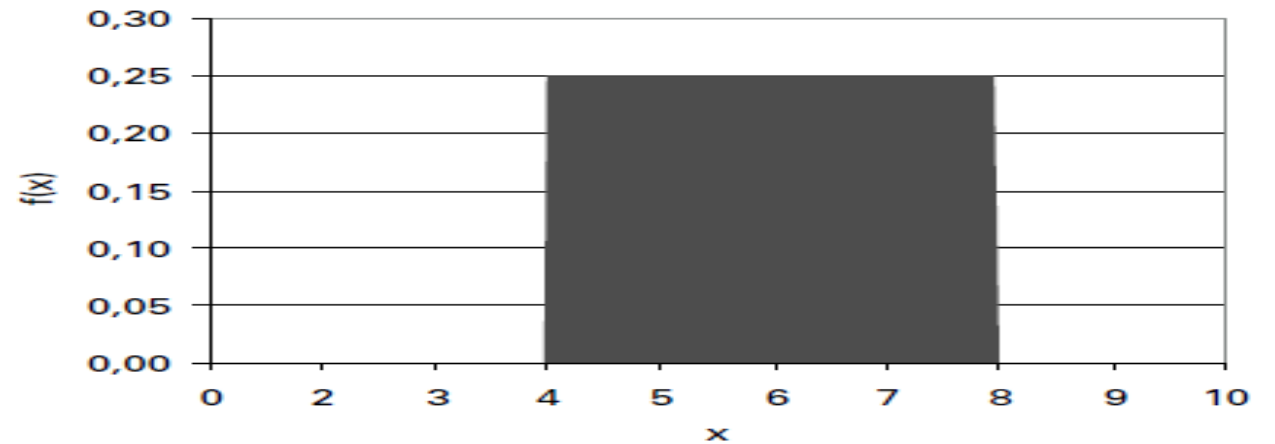
$$F(x) = 1 \quad \text{pro } x \geq b.$$

Střední hodnota:

$$E(x) = (a+b)/2.$$

Rozptyl:

$$D(x) = (b-a)^2/12.$$



Rovnoměrné rozdělení (2)

Generujeme ze vztahu $x = a + (b-a)r$, což je tak jednoduché, takže ani neříkáme, že je to aplikace metody inverzní transformace. Viz níže:

$$r = F(x)$$

$$r = (x-a)/(b-a)$$

$$(b-a)r = x-a$$

$$a + (b-a)r = x$$

$$x = a + (b-a)r$$

Exponenciální rozdělení (1)

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{pro } x > 0, \lambda > 0,$$

$$f(x) = 0 \quad \text{jinak.}$$

Distribuční funkce:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{pro } x > 0,$$

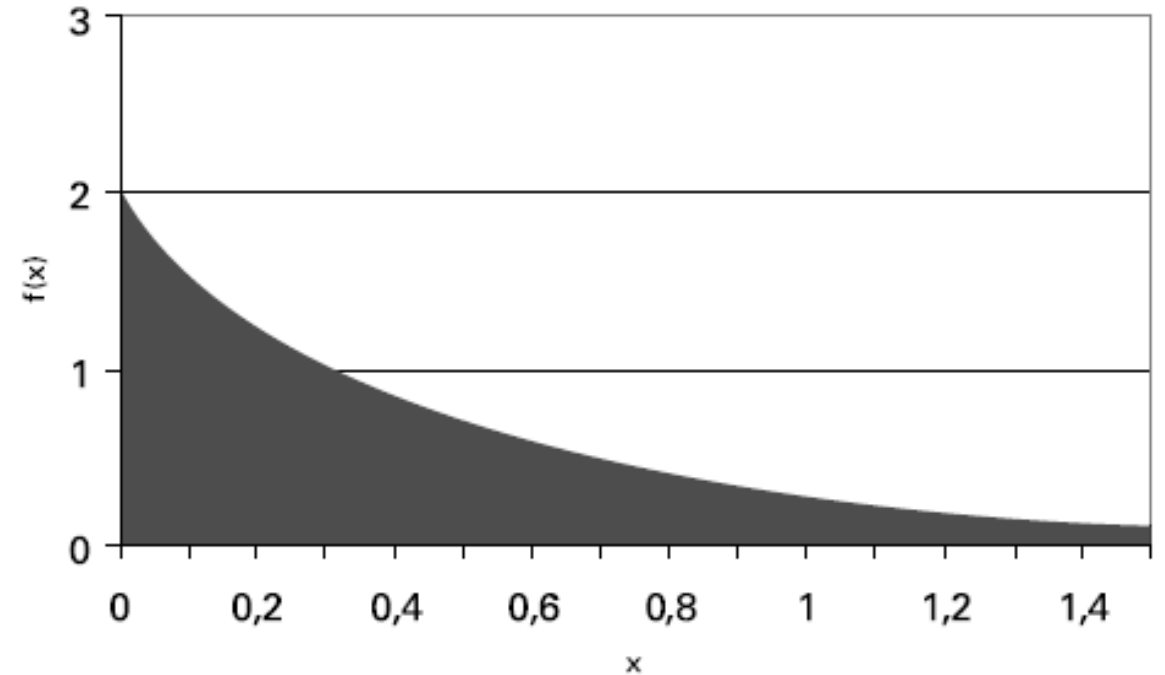
$$F(x) = 0 \quad \text{jinak.}$$

Střední hodnota:

$$E(x) = 1/\lambda.$$

Rozptyl:

$$D(x) = 1/\lambda^2.$$



Exponenciální rozdělení (2)

Generování hodnot exponenciálního rozdělení je založeno na metodě inverzní transformace distribuční funkce. Řešením rovnice $r = F(x)$ dostaneme:

$$r = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - r$$

$$-\lambda x = \ln(1 - r)$$

$$x = (-1/\lambda) \ln(1 - r)$$

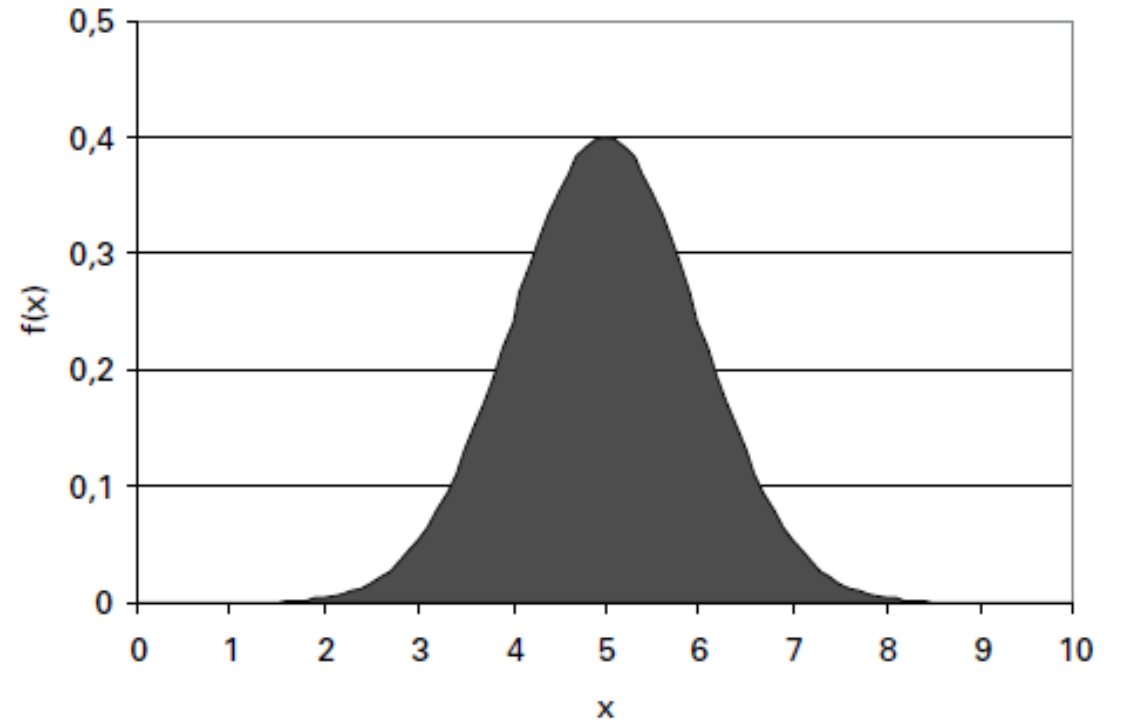
Normální rozdělení (1)

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ pro } -\infty < x < \infty$$

Střední hodnota: $E(x) = \mu$.

Rozptyl: $D(x) = \sigma^2$.



Normální rozdělení (2)

Různé způsoby generování:

- Box-Mullerova transformace
- využití centrální limitní věty
- tabelace hodnot distribuční funkce
- atd.

Trojúhelníkové rozdělení (1)

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = 2(x-a)/[(b-a)(c-a)] \quad \text{pro } a \leq x \leq b,$$

$$2(c-x)/[(c-a)(c-b)] \quad \text{pro } b \leq x \leq c,$$

$$0 \quad \text{jinak.}$$

Distribuční funkce:

$$F(x) = 0 \quad \text{pro } x < a,$$

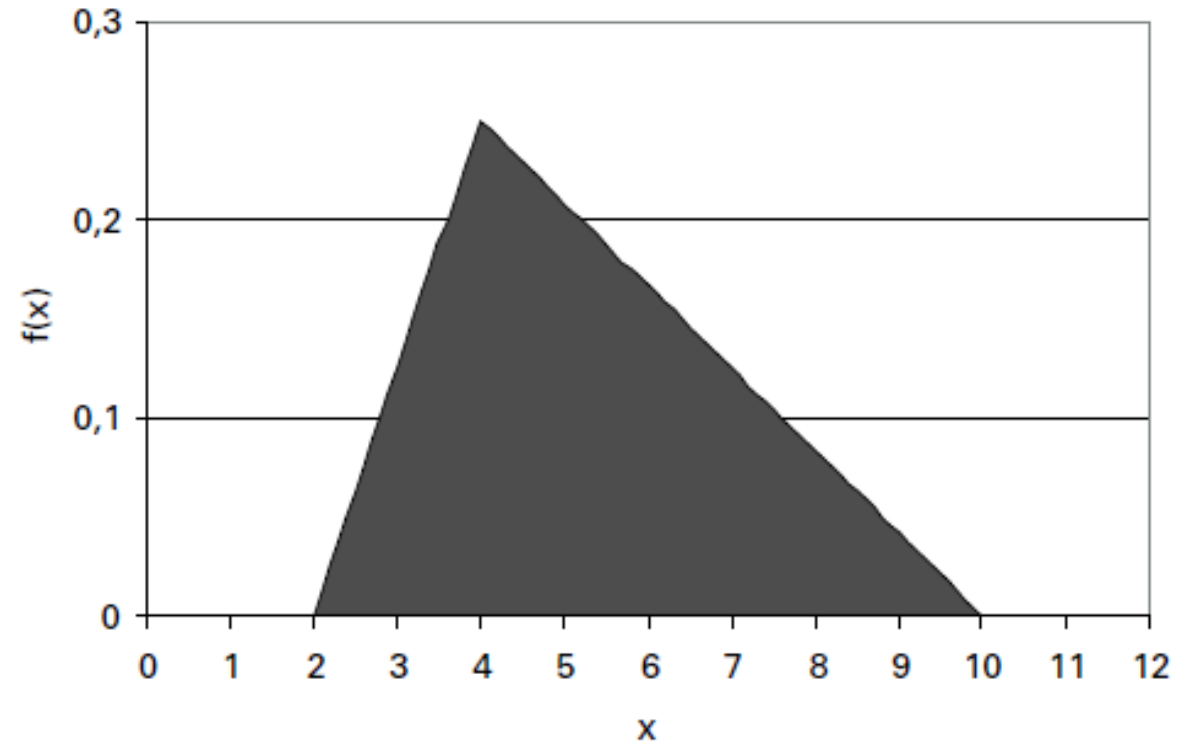
$$F(x) = (x-a)^2/((b-a)(c-a)) \quad \text{pro } a \leq x \leq b,$$

$$F(x) = 1 - (c-x)^2/((c-a)(c-b)) \quad \text{pro } b \leq x \leq c,$$

$$F(x) = 1 \quad \text{pro } x > c.$$

Střední hodnota:

$$E(x) = (a + b + c)/3.$$



Rozptyl:

$$D(x) = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)/18.$$

Trojúhelníkové rozdělení (2)

Pomocí metody inverzní transformace získáme následující algoritmus generování hodnot trojúhelníkového rozdělení $Tri(a, b, c)$:

1. $BETA = (b-a)/(c-a)$;
2. Generuj r ;
3. Jestliže $r < BETA$ pak $ALFA = (BETA r)^{0,5}$ jinak $ALFA = 1 - [(1-BETA)(1-r)]^{0,5}$;
4. $x = a - (c-a)ALFA$.