

# Kap. 2.1: Modelování variability procesů

## Generování náhodných čísel

Martin Dlouhý  
2019

# Variabilita procesů

- Počet volání na zákaznickou linku se mění
- Doba trvání obsluhy zákazníka je jednou 5 minut, jindy 7 minut, jindy 3 minuty
- Délka fronty na poště se mění
- Autobus může přijet na zastávku o minutu dříve, nebo naopak o 2 minuty později
- Diagnóza příchozího pacienta je různá

Proto je třeba variabilitu procesů umět zachytit v modelu

# Generování náhodných veličin

- Procesu získání náhodných hodnot z určitého rozdělení říkáme **generování náhodných veličin**.
- Nejdříve se však musíme naučit **generování náhodných čísel**.
- **Náhodné číslo (v simulaci)** je nezávislá hodnota rovnoměrného rozdělení na intervalu  $(0,1)$ .
- Zkráceně rovnoměrné rozdělení označíme  $R(0,1)$ , v angličtině se používá značení  $U(0,1)$  od anglického „uniform“:



To bude asi trochu problém: chceme od počítače (deterministický stroj), aby nám vracel náhodu.

# Typy generátorů náhodných čísel

1. **Tabulky náhodných čísel** (předem získaná náhodná čísla ve formě tabulky v knize, na CD, v paměti počítače)
2. **Mechanické generátory** (hrací kostka, mince, losovací zařízení)
3. **Fyzikální generátory** (radioaktivní rozpad prvků, šum, chemické procesy)
4. **Aritmetické generátory** (posloupnost náhodných čísel získáme výpočtem podle daného algoritmu)

# Tabulky náhodných čísel

- Původně v knižní formě jako pomůcka pro statistiky, např. jako příloha v učebnici statistiky
- Nutno získat náhodná čísla předem
- Nutno mít někde uloženo tisíce čísel, proto velmi nevýhodné...ale rozvoj výpočetní techniky opět vrací tuto možnost do hry

73735	45963	78134	63873
02965	58303	90708	20025
98859	23851	27965	62394
33666	62570	64775	78428
81666	26440	20422	05720

15838	47174	76866	14330
89793	34378	08730	56522
78155	22466	81978	57323
16381	66207	11698	99314
75002	80827	53867	37797

99982	27601	62686	44711
84543	87442	50033	14021
77757	54043	46176	42391
80871	32792	87989	72248
30500	28220	12444	71840

# Mechanické generátory

- Nejvíce lidem známé, protože používáme hrací kostku, karty, mince, losovací zařízení u hazardních her.
- Jejich mechanická povaha vede k tomu, že nejsou dokonalé – kostka není ideální krychle, mince není ideálně vyvážená atd.
- Losování velkého počtu čísel je nepraktické, pro simulaci nevyužitelné.



# Fyzikální generátory

- Zajišťují teoreticky dokonalou náhodnost čísel tím, že sledují náhodný fyzikální proces.
- Nepraktické z důvodu, že je třeba další zařízení k počítači.
- To se však může díky vývoji měnit....nyní možné mít miniaturní zařízení v počítači

Intel® Digital Random Number  
Generator (DRNG)

Software Implementation Guide

# Aritmetické generátory

- Náhodná čísla jsou vypočteny podle určeného vzorce. Máme tedy trochu filozofický problém: náhoda je vypočtena!
- Výhoda: nemusíme udržovat čísla v paměti, řadu lze opakovaně získat.
- Nevýhoda: čísla jsou pseudonáhodná, nevznikly náhodným procesem, nutno testovat náhodnost.
- Jedním z prvních nápadů byla metoda **prostředního řádu druhé mocniny** (von Neumannova metoda)



# Kongruenční generátory náhodných čísel

- Funkce mod = modulo = zbytek po celočíselném dělení, například 5 mod 3 je 2.
- Kongruence modulo = všechna čísla dávající stejný zbytek z funkce mod n

a) Aditivní lineární generátor NČ

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-k} \pmod{m}$$

b) Multiplikativní lineární generátor NČ

$$x_{n+1} = ax_n \pmod{m}$$

c) Smíšený lineární kongruenční generátor NČ

$$x_{n+1} = ax_n + c \pmod{m}$$

Příklad:  $x_{n+1} = 11x_n + 9 \pmod{13}$

$x_n$	$11x_n + 9$	$(11x_n + 9) \pmod{13}$	$r_{n+1} = x_{n+1}/m$
7	86	8	0,61538
8	97	6	0,46154
6	75	10	0,76923
10	119	2	0,15385
2	31	5	0,38462
5	64	12	0,92308
12	141	11	0,84615
11	130	0	0,00000
0	9	9	0,69231
9	108	4	0,30769
4	53	1	0,07692
1	20	7 (konec cyklu)	0,53846

# Testy náhodnosti

- Kvalitu generátorů náhodných čísel je třeba ověřit.
- Statistické (empirické) testy zkoumají vlastnosti vygenerované posloupnosti čísel. Zkoušejí najít rozdíl mezi **generovanou** posloupnosti čísel a **skutečně náhodnou** posloupností čísel.
- Úspěšnost generátoru ve více testech zvyšuje naši důvěru v daný generátor, nikdy však nemáme jistotu.
- Lze například testovat:
  - rovnoměrnost rozložení čísel na intervalu  $(0, 1)$ .
  - pozitivní či negativní korelaci po sobě následujících čísel.
  - výskyt číslic v generovaných číslech.
  - atd.

# Frekvenční test

Test je využíván k testování rovnoměrnosti rozdělení náhodných čísel na intervalu (0, 1). Interval rozdělíme na  $k$  menších intervalů. Pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty z intervalu  $(a, b)$ , je rovna rozdílu hodnot  $b-a$ . Nulová hypotéza předpokládá shodu očekávaných a skutečných četností v jednotlivých intervalech. Nejpoužívanějším testem je chí-kvadrát test (test dobré shody). Hodnota chí-kvadrát se vypočítá dle vzorce:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(o_j - e_j)^2}{o_j},$$

kde  $o_j$  je očekávaná četnost v intervalu  $j$ ,  $e_j$  je empirická četnost. Vypočtená hodnota se porovná s kritickou hodnotou rozdělení chí-kvadrát s  $k-1$  stupni volnosti pro zvolenou hladinu statistické významnosti. Při překročení kritické hodnoty zamítneme na určené hladině významnosti nulovou hypotézu o rovnoměrném rozdělení souboru náhodných čísel.

# Poker test

Test vychází ze známé karetní hry, testuje četnost výskytu číslic v generovaných náhodných číslech. V tabulce je výčet možností pro pětimístná náhodná čísla. Pro testování shody empirických a očekávaných četností lze využít zmíněný test dobré shody.

Varianta	Název	Pravděpodobnost
a b c d e	všechny různé	0,3024
a a b c d	jedna dvojka	0,5040
a a b b c	dvě dvojky	0,1080
a a a b c	trojka	0,0720
a a a b b	dvojka a trojka	0,0090
a a a a b	čtyřka (poker)	0,0045
a a a a a	pětka	0,0001