

## 2. Vícekriteriální a cílové programování

Úlohy vícekriteriálního programování jsou úlohy, ve kterých se na množině přípustných řešení optimalizuje několik skalárních kriteriálních funkcí. Množina přípustných řešení je přitom definována podobně jako v úlohách matematického programování. Za předpokladu linearit omezujících podmínek i účelových funkcí se mluví o úlohách vícekriteriálního lineárního programování. Tuto úlohu můžeme matematicky formulovat následovně:

„maximalizovat“

$$\begin{aligned} z_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n, \\ z_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ z_k &= c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \dots + c_{kn}x_n, \end{aligned} \quad (2.1)$$

za podmínek

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m, \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Symbol „maximalizace“ je úmyslně uveden v uvozovkách, protože nelze jednoznačně definovat, co se rozumí současnou maximalizací několika kriteriálních funkcí. Úlohu (2.1) - (2.2) je možné zapsat maticově:

„maximalizovat“

$$\begin{aligned} z_1 &= \mathbf{c}^1 \mathbf{x}, \\ z_2 &= \mathbf{c}^2 \mathbf{x}, \\ &\vdots \\ z_k &= \mathbf{c}^k \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

za podmínek

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}, \quad (2.4)$$

kde  $\mathbf{c}^i, i = 1, 2, \dots, k$  je vektor cenových koeficientů  $i$ -té účelové funkce.

Podobně jako v úlohách VHV je možné i v úloze vícekriteriálního lineárního programování (VLP) definovat vztah nedominovanosti nebo domínovanosti mezi dvěma přípustnými řešeními a nedominované řešení úlohy VLP.

Libovolné přípustné řešení  $\mathbf{x}^p \in \mathbf{X}$  je charakterizováno vektorem kriteriálních hodnot  $(\mathbf{c}^1 \mathbf{x}^p, \mathbf{c}^2 \mathbf{x}^p, \dots, \mathbf{c}^k \mathbf{x}^p)$ . Jestliže  $\mathbf{x}^p \in \mathbf{X}$  a  $\mathbf{x}^q \in \mathbf{X}$  jsou libovolná přípustná řešení úlohy VLP, potom mohou nastat následující možnosti:

- řešení  $\mathbf{x}^p$  **dominuje** řešení  $\mathbf{x}^q$ , jestliže platí  $(\mathbf{c}^1 \mathbf{x}^p, \mathbf{c}^2 \mathbf{x}^p, \dots, \mathbf{c}^k \mathbf{x}^p) \geq (\mathbf{c}^1 \mathbf{x}^q, \mathbf{c}^2 \mathbf{x}^q, \dots, \mathbf{c}^k \mathbf{x}^q)$ , kde relace  $\geq$  vylučuje rovnost obou vektorů,
- řešení  $\mathbf{x}^q$  **dominuje** řešení  $\mathbf{x}^p$ , jestliže platí  $(\mathbf{c}^1 \mathbf{x}^q, \mathbf{c}^2 \mathbf{x}^q, \dots, \mathbf{c}^k \mathbf{x}^q) \geq (\mathbf{c}^1 \mathbf{x}^p, \mathbf{c}^2 \mathbf{x}^p, \dots, \mathbf{c}^k \mathbf{x}^p)$ , kde relace  $\geq$  vylučuje rovnost obou vektorů,
- řešení  $\mathbf{x}^p$  a řešení  $\mathbf{x}^q$  jsou navzájem nedominovaná.

Říkáme, že řešení  $\mathbf{x}^p \in \mathbf{X}$  je **nedominovaným řešením úlohy VLP**, pokud neexistuje jiné přípustné řešení, které by jej dominovalo.

Cílem při řešení takové úlohy je zpravidla nalezení nějakého **kompromisního řešení** podobně, jako tomu bylo při analýze úloh VHV. Je užitečné si uvědomit, že kompromisní řešení musí být vždy řešením nedominovaným. Pro výpočet kompromisního řešení úlohy VLP je možné použít několik základních principů. Všechny z nich zpravidla vedou k řešení jedné či několika standardních úloh lineárního programování. Toto řešení se provádí běžnými postupy pro řešení lineárních optimalizačních úloh.

### 1. Princip agregace účelových funkcí

Tento princip je založený na ohodnocení důležitosti kriteriálních funkcí váhami  $v_1, v_2, \dots, v_k, \sum v_i = 1$ . Místo úlohy (2.3) - (2.4) se potom řeší běžná úloha lineárního programování:

maximalizovat

$$z = \sum_{i=1}^k v_i \mathbf{c}^i \mathbf{x}, \quad (2.5)$$

za podmínek (2.4).

Za předpokladu nezápornosti všech vah účelových funkcí lze snadno dokázat, že tímto způsobem získáme vždy nedominované řešení.

### 2. Kompromisní řešení podle minimální komponenty

Cílem tohoto principu je nalézt takové kompromisní řešení, které bude maximalizovat minimální, tedy nejhorší, hodnotu ze všech kriteriálních funkcí. Označíme-li tuto minimální komponentu  $\delta$ , potom lze kompromisní řešení podle minimální komponenty najít jako řešení následující úlohy lineárního programování:

maximalizovat

$$\delta,$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^1 \mathbf{x} &\geq \delta, \\ \mathbf{c}^2 \mathbf{x} &\geq \delta, \\ &\vdots \\ \mathbf{c}^k \mathbf{x} &\geq \delta, \\ \mathbf{x} &\in \mathbf{X}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

### 3. Minimalizace vzdálenosti od ideálních hodnot

Ideální hodnotu pro  $i$ -tou účelovou funkci označíme  $z_i^{\text{opt}}$ . Jedná se o optimální hodnotu této účelové funkce na množině přípustných řešení. Ideální hodnotu by bylo možné získat optimalizací příslušné kriteriální funkce.

Při použití tohoto principu hledáme takové kompromisní řešení, které bude minimalizovat vážený součet odchylek od ideálních hodnot. Budeme tedy řešit úlohu LP:

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^k v_i (z_i^{\text{opt}} - \mathbf{c}^i \mathbf{x}), \quad (2.7)$$

za podmínek  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ,

kde  $v_i > 0$ , je váha  $i$ -té účelové funkce.

#### 4. Cílové programování

Pro získání kompromisního řešení úlohy VLP se velmi často používá *cílové programování*. Základní principy cílového programování nacházejí uplatnění i v některých modelech analýzy obalu dat, které byly probrány rovněž v tomto tématu

Úloha cílového programování obsahuje v typickém případě několik základních částí:

1. *Pevné cíle* jsou podmínky, které jsou vyjádřeny ve formě nerovnic nebo rovnic a které musí být v modelu respektovány, tzn. nelze akceptovat takové řešení, které by některý z pevných cílů nespĺňovalo. V matematickém vyjádření mají volné cíle podobu omezujících podmínek v běžné úloze lineárního programování, tj.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

2. *Volné cíle* jsou podmínky, které jsou bilancí mezi hodnotou “levé strany” omezující podmínky a mezi zadanou cílovou hodnotou. U volných cílů se používají pro vyjádření kladných a záporných odchylek od daných cílových hodnot *odchylkové proměnné*. Záporné odchylkové proměnné od  $i$ -té cílové hodnoty budeme označovat  $d_i^-$ , kladné odchylkové proměnné  $d_i^+$ . Obecný zápis  $i$ -tého bilančního omezení může tedy vypadat následovně:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = g_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

kde  $\sum c_{ij} x_j$  je levá strana omezující podmínky a  $g_i$  je příslušná cílová hodnota.

3. *Účelová funkce* modelu cílového programování je obecně vyjádřena jako minimalizace odchylek od zadaných cílových hodnot, tj. jedná se o minimalizaci odchylkových proměnných. Do účelové funkce lze zahrnout buď záporné nebo kladné nebo oba typy odchylkových proměnných:
  - *minimalizace záporné odchylky* vede k získání řešení, které se “zdola” co nejvíce přibližuje dané cílové hodnotě, může být však libovolně vyšší než tato cílová hodnota - použití například tehdy, vyjadřuje-li cílová hodnota požadavek na dosažení zadané úrovně zisku,
  - *minimalizace kladné odchylky* vede k získání řešení, které se “shora” co nejvíce přibližuje dané cílové hodnotě, může být však libovolně nižší než tato cílová hodnota - například požadavek na získání řešení, které se co nejvíce přibližuje cílovým nákladům,
  - *minimalizace součtu kladné a záporné odchylky* vede k získání řešení, které se “oboustranně” co nejvíce přibližuje dané cílové hodnotě - například požadavek na

pokud možno co nejúplněji využití nějakého zdroje (aby nic nezbylo a nebylo třeba zdroj dodatečně rozšiřovat).

V jakémkoliv, i velmi malém, modelu cílového programování může být cílů definováno několik. Jak jsme se již zmínili v úvodu tohoto oddílu, důležitost těchto cílů může být vyjádřena buď jejich uspořádáním od nejdůležitějšího po nejméně důležitý (lexikografické cílové programování), nebo pomocí bezrozměrných koeficientů (vah), které vyjadřují stupeň důležitosti splnění cíle. Pokud odlišíme důležitost cílů váhami, můžeme minimalizovat:

- vážený součet odchylek nebo
- maximální váženou odchylku.

Při *minimalizaci váženého součtu odchylek* bude celá úloha cílového programování naformulována následovně:

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^k (v_i^- d_i^- + v_i^+ d_i^+)$$

za podmíněk

(2.8)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = g_i, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$d_i^- \geq 0, d_i^+ \geq 0, d_i^- d_i^+ = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

kde  $v_i^-$  a  $v_i^+$  jsou váhy, ohodnocující důležitost záporných a kladných odchylek volného cíle  $g_i$ .

Při *minimalizaci vážené maximální odchylky* se výše uvedený model bude modifikovat následovně:

minimalizovat

$$\delta,$$

za podmíněk

(2.9)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = g_i, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$v_i^- d_i^- + v_i^+ d_i^+ \leq \delta, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$d_i^- \geq 0, d_i^+ \geq 0, d_i^- d_i^+ = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

kde proměnná  $\delta$  představuje maximální hodnotu vážené odchylky, kterou se snažíme minimalizovat.

Ve všech uvedených principech je třeba sledovat, zda jsou hodnoty dílčích kriteriálních funkcí navzájem srovnatelné. Pokud tomu tak není, tzn. některé hodnoty jsou v tisících, jiné

třeba jen v jednotkách, je třeba výše uvedené formulace optimalizačních úloh modifikovat tak, že váhy účelových funkcí v úlohách (2.5) a (2.7) a levou stranu omezujících podmínek v úloze (2.6) vydělíme jejich ideálními hodnotami  $z_i^{opt}$ . Po této úpravě budou všechny ideální hodnoty rovny 1 (100 %) a my budeme vlastně pracovat s procentními odchylkami. V úlohách cílového programování (2.8) a (2.9) doporučujeme vydělit váhy odchylek cílovými hodnotami a tak vlastně minimalizovat procentní odchylky od cílových hodnot, které jsou již vzájemně srovnatelné.

Modely cílového programování jsou obecnější než standardní modely LP, protože často skutečně nelze jednoznačně určit jediné kritérium optimality. Uživatelům je většinou bližší zadání nějakých žádoucích (cílových) hodnot, ke kterým se v průběhu optimalizace shora či zdola přibližuje.

### **Příklad – formulace modelu cílového programování**

Uvažujme rozhodovací problém, ve kterém se jedná o nákup dvou druhů cenných papírů (akcie a obligace). Pro tento nákup jsou k dispozici prostředky (100%), které nemohou být překročeny, nemusí však být plně vyčerpány. Očekávaný výnos z akcií je 15%, z obligací 10% p.a. Obě investice jsou oceněny z hlediska rizika bezrozměrným koeficientem, který je u akcií 5 a u obligací 2 (čím vyšší koeficient, tím vyšší riziko). Do akcií nemůže být investováno více než 50% dostupných prostředků, do obligací maximálně 75% těchto prostředků. Model by měl navrhnout takovou skladbu portfolia, která dosáhne průměrný výnos 12% p.a. a vážená míra rizika bude rovna 3.

V tomto příkladu lze zavést dvě proměnné, které budou udávat podíl prostředků investovaných do akcií ( $x_1$ ) a do obligací ( $x_2$ ). Podle zadání by pro tyto proměnné mělo platit:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1, && \text{(maximálně 100\% celkem),} \\ x_1 &\leq 0.5, && \text{(maximálně 50\% do akcií),} \\ x_2 &\leq 0.75, && \text{(maximálně 75\% do obligací),} \\ x_1 &\geq 0, x_2 &\geq 0, && \text{(podmínky nezápornosti).} \end{aligned}$$

Pokud bychom uvedený model chtěli dále formulovat jako standardní úlohu lineárního programování, potom máme dvě možnosti:

1. K modelu doplnit omezující podmínku, která bude omezovat celkové riziko na 3 a maximalizovat očekávaný výnos. K výše uvedeným omezujícím podmínkám by se v tomto případě doplnilo omezení

$$5x_1 + 2x_2 \leq 3,$$

a maximalizovala by se kritériální funkce

$$z = 15x_1 + 10x_2.$$

Čtenář se může přesvědčit, že optimální řešení této úlohy je  $x_1 = 1/3$  a  $x_2 = 2/3$ . Při průměrné míře rizika 3 bude dosažen výnos 11.67% p.a.

2. K modelu doplnit omezující podmínku, která zabezpečí dosažení minimálního výnosu 12% p.a. a minimalizovat celkové riziko. Omezující podmínka bude mít tvar

$$15x_1 + 10x_2 \geq 12.$$

Minimalizovat se bude účelová funkce

$$z = 5x_1 + 2x_2 .$$

Optimální řešení tohoto modelu je  $x_1 = 0.4$  a  $x_2 = 0.6$ . Očekávaný výnos 12% p.a. bude dosažen při průměrném riziku 3.2.

Uvedený příklad lze však naformulovat i jako úlohu cílového programování, ve které budou definovány dva cíle:

1. dosažení očekávaného zisku alespoň na úrovni 12% p.a.
2. dosažení průměrné míry rizika 3.

Pro ilustraci, zápis volného cíle pro očekávaný výnos bude v naší úloze vypadat následovně (cílová hodnota je rovna 12%):

$$15x_1 + 10x_2 + d_1^- - d_1^+ = 12 .$$

akcie ( $x_1$ )	obligace ( $x_2$ )	výnos	$d_1^-$	$d_1^+$
0.5	0.5	12.5	0	0.5
0.4	0.6	12.0	0	0
0.3	0.7	11.5	0.5	0
0.25	0.75	11.25	0.75	0

Tab. 2.1 - Hodnoty odchylových proměnných.

Tabulka 2.1 ilustruje na několika řešeních, jakých hodnot nabývají odchylové proměnné (hodnota průměrného výnosu je v této tabulce vypočtena jako  $15x_1 + 10x_2$ ). Z údajů v této tabulce je zřejmé, že vždy alespoň jedna z obou odchylových proměnných je rovna 0. Je-li daná cílová hodnota splněna přesně, jsou obě odchylové proměnné rovny 0 ( $d_1^- = d_1^+ = 0$ ). Pokud je skutečné plnění cíle nižší než cílová hodnota, potom je záporná odchylová proměnná větší než nula ( $d_1^- > 0$ ) a kladná odchylová proměnná je nulová ( $d_1^+ = 0$ ) a naopak, je-li skutečné plnění cíle vyšší než daná cílová hodnota, potom je kladná odchylová proměnná větší než nula ( $d_1^+ > 0$ ) a záporná odchylová proměnná je nulová ( $d_1^- = 0$ ). Z uvedeného plyne, že pro volné cíle může být levá strana omezení, na rozdíl od pevných cílů, menší, rovna nebo větší dané cílové hodnotě (pravé straně). Tato relace závisí na hodnotách kladných a záporných odchylových proměnných.

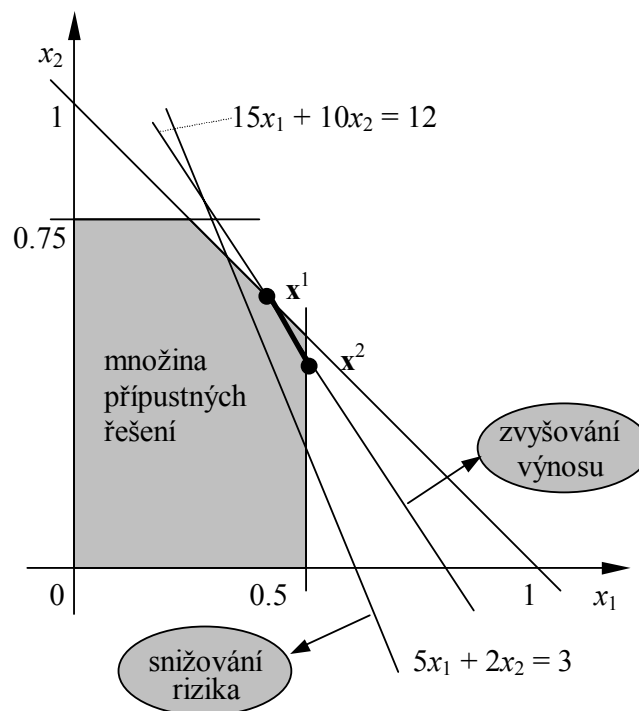
Soustavu strukturálních i dvou bilančních omezujících podmínek (včetně podmínek nezápornosti) lze v tomto případě zapsat následovně:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 , \\ x_1 &\leq 0.5 , \\ x_2 &\leq 0.75 , \\ 15x_1 + 10x_2 + d_1^- - d_1^+ &= 12 , \\ 5x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ &= 3 , \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 , \\ d_1^- \geq 0, d_2^- \geq 0, \\ d_1^+ \geq 0, d_2^+ \geq 0. \end{aligned}$$

V účelové funkci (ať už budou cíle odlišeny preferencemi nebo váhami) se bude jednat o minimalizaci záporné odchylky od požadovaného výnosu, tj. minimalizaci hodnoty proměnné  $d_1^-$  a zároveň o minimalizaci kladné odchylky od požadované míry rizika, tj. minimalizace hodnoty proměnné  $d_2^+$ .

Při odlišení cílů pomocí preferencí jsou cíle zařazeny do jednotlivých preferenčních stupňů - čím vyšší stupeň, tím vyšší míra preference daného cíle. Řešení úlohy probíhá potom v několika krocích. V prvním kroku se minimalizuje nežádoucí odchylka od cíle, který má nejvyšší preferenci. Pokud se při této optimalizaci nalezne řešení, které není jediné, potom se na množině optimálních řešení z prvního kroku minimalizuje nežádoucí odchylka od cíle s druhou nejvyšší preferencí atd. Uvažujme nejprve, že první cíl (dosažení výnosu 12% p.a.) má vyšší důležitost než cíl druhý (dosažení míry rizika 3). Výpočet bude v tomto případě probíhat tak, že budeme nejprve minimalizovat hodnotu odchylkové proměnné příslušející nejdůležitějšímu cíli - v našem případě hodnotu proměnné  $d_1^-$ . Je-li výsledkem této optimalizace jediné optimální řešení, potom už dále ve výpočtu nemá smysl pokračovat, protože druhý cíl v pořadí důležitosti nelze zřejmě zlepšit bez zhoršení cíle, který má důležitost vyšší. Bude-li řešení alternativní, potom lze ze všech optimálních řešení vybrat řešení, které je nelepší vzhledem ke druhému cíli v pořadí - v našem případě se bude minimalizovat hodnota odchylkové proměnné  $d_2^+$ .

Celý postup výpočtu je ilustrován na obr. 2.1. Množina přípustných řešení je na tomto obrázku zvýrazněna stínováním. Dále jsou zde zakresleny dvě přímky  $15x_1 + 10x_2 = 12$  resp.  $5x_1 + 2x_2 = 3$ , které jsou množinami bodů, pro které platí, že očekávaný výnos je roven 12% resp. míra rizika je rovna 3.



Obr. 2.1 - Řešení úlohy cílového programování.

Všimněte si, že nelze dosáhnout současně splnění obou cílů, neboť se obě uvedené přímky protínají mimo oblast přípustných řešení. Protože dosažení výnosu 12% má vyšší prioritu,

jedná se při řešení v první fázi o nalezení takového řešení, které minimalizuje zápornou odchylku od stanoveného výnosu. Takové řešení existuje a není jen jediné. Na obr. 2.1 je vidět, že všechny body, které leží na hraně určené body  $x^1$  a  $x^2$ , představují řešení, které poskytuje výnos 12% (na obr. 2.1 je množina těchto bodů zvýrazněna silnou čarou). Z těchto řešení se budeme snažit vybrat takové řešení, které minimalizuje kladnou odchylku od požadované úrovně rizika 3. Z grafického znázornění plyne, že tímto řešením je bod  $x^1$ . Hodnoty proměnných odpovídajícího řešení jsou  $x_1 = 0.4$  a  $x_2 = 0.6$ . Dosazením do výnosové funkce a do funkce rizika si lze ověřit, že výnos tohoto řešení je skutečně 12% p.a. a míra rizika je  $5 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.6 = 3.2$ . Míra rizika není tedy na požadované úrovni, ale řešení s výnosem 12% a s nižší mírou rizika neexistuje.

Při odlišení cílů váhami se každé kladné a záporné odchylce od cílových hodnot přiřadí *váhy*, tj. koeficienty, které ohodnocují důležitost těchto odchylek. Při vlastním řešení se potom minimalizuje celkový vážený součet všech odchylek. Protože jsou však cíle a tedy i odchylky od nich v různých jednotkách a tedy v různé výši, je rozumné posuzovat odchylky ne v absolutním vyjádření, ale jako relativní (procentní) odchylky. Výsledná účelová funkce může mít tedy v tomto případě tvar:

$$z = \sum_{i=1}^k v_i^- \frac{d_i^-}{g_i} + \sum_{i=1}^k v_i^+ \frac{d_i^+}{g_i},$$

kde  $k$  je počet cílových hodnot,  $v_i^-$  a  $v_i^+$  jsou váhy přiřazené kladným a záporným odchylkám od  $i$ -té cílové hodnoty a  $g_i$  je  $i$ -tá cílová hodnota. Uvažujme, že v našem příkladu bude záporné odchylce od cílové hodnoty očekávaného výnosu ( $d_1^-$ ) přiřazena váha 5 a kladné odchylce od stanovené hodnoty rizika ( $d_2^+$ ) váha 2. Potom se bude na množině přípustných variant (viz obr.2.1) minimalizovat vážený součet odchylek

$$z = \frac{5d_1^-}{12} + \frac{2d_2^+}{3}.$$

Výpočtem simplexovou metodou dostáváme v tomto případě řešení  $x_1 = 1/3$  a  $x_2 = 2/3$ . V tomto řešení bude dosaženo očekávaného výnosu 11 2/3% při míře rizika 3. Všimněte si, že zde je zcela splněn druhý cíl (riziko), který má nižší váhu. Naopak není dosažen požadovaný výnos 12%, ale výnos o 1/3% nižší.

### Výpočetní aspekty

V tomto oddílu jsme se věnovali spíše metodologii cílového programování. Z výpočetního hlediska však modely cílového programování nepřinášejí žádné vážnější potíže. Uživatel vystačí s běžnou znalostí simplexové metody, jejíž principy byly vyloženy v kapitole 2. Při zpracování na počítači stačí mít k dispozici jakýkoliv systém umožňující řešit úlohy lineárního programování. Pokud jsou cíle odlišeny váhami, potom stačí minimalizovat jedinou účelovou funkci. Při odlišení cílů preferencemi může být počet výpočetních kroků vyšší - především v závislosti na počtu cílových hodnot a preferenčních stupňů. I pro tento výpočet však lze vystačit, i když s jistými problémy, s běžným software pro řešení úloh lineárního programování.