Stochastické modely
Poznámky k modelům řízení zásob

Jan Zouhar
Katedra ekonometrie, VŠE v Praze, zouharj@vse.cz

Deterministický model s přechodným neuspokojením poptávky

Značení. q je velikost objednávky, s je velikost přechodně neuspokojené poptávky v jednom cyklu, Q je roční poptávka, c_1 jsou skladovací náklady za ks a rok, c_2 fixní náklady jedné dodávky, c_3 penále z neuspokojené poptávky za ks a rok, N je funkce celkových ročních nákladů. Veličina Q má rozdělení s distribuční funkcí F.

Nákladová funkce. Nákladová funkce má tvar

$$\begin{aligned} N(q,s) &= c_1 \frac{q-s}{2} \frac{t_1}{t} + c_2 \frac{Q}{q} + c_3 \frac{s}{2} \frac{t_2}{t} \\ &= \frac{c_1}{2} \frac{(q-s)^2}{q} + c_2 \frac{Q}{q} + \frac{c_3}{2} \frac{s^2}{q}. \end{aligned}$$

Optimální velikost objednávky. Vyjdeme z podmínek prvního řádu, tj. vynulujeme obě parciální derivace. Začneme s derivací podle s

$$\frac{\partial N}{\partial s} = c_1 \frac{s-q}{q} + c_3 \frac{s}{q} \stackrel{!}{=} 0,$$

neboli

$$s = \frac{c_1}{c_1+c_3} q = \beta q,$$

kde $\beta \equiv \frac{c_1}{c_1+c_3}$. Z definice β dále zřejmě plyne

$$\frac{c_3}{c_1}\beta = 1-\beta = \frac{q-s}{q}, \tag{1}$$

$$2(1-\beta) - (1-\beta)^2 - \frac{c_3}{c_1}\beta^2 = 2 - 2\beta - 1 + 2\beta - \beta^2 - \beta + \beta^2 = 1-\beta, \tag{2}$$

$$\frac{1}{1-\beta} = \frac{c_1+c_3}{c_3}. \tag{3}$$

Z derivace nákladů podle q dostaneme (nejprve jsme vytkli v nákladové funkci ze všech sčítanců $1/q$ a následně derivovali jako součin, je to tak asi nejpřehlednější):

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial q} &= \frac{1}{q}\left[c_1(q-s) + 0 + 0\right] - \frac{1}{q^2}\left[\frac{c_1}{2}(q-s)^2 + c_2 Q + \frac{c_3}{2}s^2\right] \\ &\stackrel{(1)}{=} c_1(1-\beta) - \frac{c_1}{2}(1-\beta)^2 - \frac{c_2 Q}{q^2} - \frac{c_3}{2}\beta^2 \\ &\stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

přičemž ve druhé rovnosti jsme využili (1). Odtud již snadnou úpravou dostaneme

$$\frac{2Qc_2}{c_1 q^2} = 2(1-\beta) - (1-\beta)^2 - \frac{c_3}{c_1}\beta^2 \stackrel{(2)}{=} 1-\beta$$

a s přihlédnutím k (3) dostaneme

$$q^{\text{opt}} = \sqrt{\frac{2Qc_2}{c_1}} \cdot \sqrt{\frac{c_1+c_3}{c_3}}.$$

Problém kamelota (newsvendor model)

Značení. q je velikost objednávky, Q je náhodná veličina představující celkovou poptávku (její konkrétní možné hodnoty značíme x), N je funkce celkových nákladů.

Vyjádření očekávaných nákladů. Střední hodnota celkových nákladů lze vyjádřit následujícím způsobem [píšeme všude pro jednoduchost $\mathrm{d}F$ místo $\mathrm{d}F(x)$]:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}N(Q,q) &= \int_{-\infty}^{\infty} N(x,q)\,\mathrm{d}F \\
&= \int_{-\infty}^{q} \underbrace{c_1(q-x)}_{A}\,\mathrm{d}F + \int_{q}^{\infty} \underbrace{c_2(x-q)}_{B}\,\mathrm{d}F \\
&= \int_{-\infty}^{q} A \;+ \int_{-\infty}^{\infty} B \;- \int_{-\infty}^{q} B \\
&= \int_{-\infty}^{q} (A-B) \;+ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} B}_{=\mathsf{E}B} \\
&= \int_{-\infty}^{q} (c_1+c_2)(q-x)\,\mathrm{d}F + \mathsf{E}\big[c_2(Q-q)\big] \\
&= (c_1+c_2)qF(q) - (c_1+c_2)\int_{-\infty}^{q} x\;\mathrm{d}F + c_2\mathsf{E}Q - c_2 q.
\end{aligned}$$

Spojitá poptávka. Nejprve uvažujme spojité rozdělení Q, tj. Q má hustotu pravděpodobnosti $f = F'$, neboli $\int_{-\infty}^{q} x\;\mathrm{d}F = \int_{-\infty}^{q} x f(x)\,\mathrm{d}x$. Chceme-li minimalizovat očekávané náklady, položíme jejich derivaci podle q rovnu nule[1]:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\mathsf{E}N(Q,q) &= (c_1+c_2)[F(q) - qf(q)] - (c_1+c_2)qf(q) - c_2 \\
&= (c_1+c_2)F(q) - c_2 \stackrel{!}{=} 0\,.
\end{aligned}$$

Odtud ihned dostaneme, že q minimalizuje očekávané náklady, pokud

$$F(q) = \frac{c_2}{c_1+c_2}\,.$$

Označíme-li $\gamma = \frac{c_2}{c_1+c_2}$, můžeme říci, že hledáme 100γ-procentní kvantil rozdělení pro poptávané množství.

Diskrétní poptávka. Nyní uvažujme diskrétní rozdělení Q, neboli

$$\int_{-\infty}^{q} x\;\mathrm{d}F = \sum_{x=-\infty}^{q} x\,\mathrm{Pr}\{Q=x\}.$$

[1] Zkuste si tuto derivaci sami vyjádřit. Je zde podstatné, že pro libovolnou integrovatelnou funkci h platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\int_{-\infty}^{q} h(x)\,\mathrm{d}x = h(q). \tag{4}$$

(Toto tvrzení se někdy nazývá *větou o derivaci integrálu podle horní meze.*) Odtud ihned dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\int_{-\infty}^{q} x\;\mathrm{d}F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\int_{-\infty}^{q} xf(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{(4)}{=} qf(q).$$

Zbytek je snadný.

Pro množství q minimalizující náklady musí platit, že je to bod, kde se změní diference očekávaných nákladů ze záporné na kladnou, přesněji že

$$\Delta \mathsf{E} N(Q,q) = \mathsf{E} N(Q,q) - \mathsf{E} N(Q,q-1) \leq 0,$$
$$\Delta \mathsf{E} N(Q,q+1) = \mathsf{E} N(Q,q+1) - \mathsf{E} N(Q,q) \geq 0.$$

Jednoduchou, ač trochu otravnou, algebraickou úpravou dostaneme (srovnej se spojitým případem)

$$\Delta \mathsf{E} N(Q,q) = (c_1 + c_2) F(q-1) - c_2 .$$

Závěr je tedy podobný jako u spojitého případu: optimální q je takové, kde se distribuční funkce $F(q)$ porpvé přehoupne přes hodnotu $c_2/(c_1+c_2)$. V případě, že pro nějaké q platí

$$F(q) = \frac{c_2}{c_1 + c_2} ,$$

jsou optimální množství q i $q+1$.