Stochastické modely
Informace k závěrečné zkoušce

Jan Zouhar
Katedra ekonometrie, FIS VŠE v Praze, zouharj@vse.cz

10. února 2015

Průběh zkoušky. Zkouška je ústní s přípravou na potítku. Každý si vylosuje 1 otázku, která má následující části: 2 teoretické otázky (každá za max. 20 bodů) a 2 příklady (každý za 10 bodů) ze seznamů uvedených níže. Celkem je tedy možné získat 60 bodů.

Poznámky k použitému značení. V otázkách i příkladech používám zkratku MŘ = markovský řetězec. Symbol $\boldsymbol{A}$ představuje vždy limitu mocnin přechodové matice v regulárních MŘ s diskrétním časem. Je-li v příkladu zadán MŘ pomocí jeho přechodové matice nebo matice intenzit řádu n, pak jeho množina stavů $S = \{1, \ldots, n\}$ a řazení stavů v přechodové matici odpovídá jejich číslům (tj. první řádek obsahuje pravděpodobnosti p_{1j} apod.). Je-li MŘ zadán přechodovou maticí, jedná se automaticky o MŘ s diskrétním časem; je-li zadán maticí intenzit, jedná se o MŘ s časem spojitým.

Teoretické otázky.

1 Náhodný proces; definice, základní klasifikace a příklady náhodných procesů.

2 Přechodová matice, přechodový graf a přechodové pravděpodobnosti za jeden nebo více kroků v MŘ s diskrétním časem.

3 Definice markovské vlastnosti, MŘ a homogenního MŘ; příklady náhodných procesů nesplňujících markovskou vlastnost.

4 Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnice pro MŘ, důkaz jejich platnosti; lze volit variantu buď pro obecný, nebo speciálně pro homogenní MŘ.

5 Klasifikace stavů MŘ s diskrétním časem; rekurence a tranzience, periodicita, absorpční stavy.

6 Klasifikace MŘ s diskrétním časem: nerozložitelné, regulární a absorpční řetězce (a vztahy mezi nimi).

7 Absorpční MŘ s diskrétním časem; kanonický tvar přechodové matice a jejích mocnin, věta o mizejících pravděpodobnostech tranzientních stavů (bez důkazu).

8 Věta o fundamentální matici absorpčního MŘ s diskrétním časem a její důkaz, výpočet průměrné doby do absorpce.

9 Výpočet střední doby prvního návratu v nerozložitelném MŘ s diskrétním časem převedením na absorpční MŘ.

10 Výpočet pravděpodobnosti absorpce konkrétním stavem v absorpčním MŘ s diskrétním časem, s důkazem korektnosti výpočtu (neboli s jeho odvozením).

11 Věty o limitním chování regulárních MŘ s diskrétním časem (bez důkazu), jejich interpretace.

12 Vlastnosti limitní matice $\boldsymbol{A}$ v regulárním MŘ s diskrétním časem a jejich odvození (při odvození můžete využít věty o limitním chování regulárních MŘ s diskrétním časem).

13 Vztah mezi středními dobami prvního návratu a stacionárním vektorem v regulárním MŘ s diskrétním časem, včetně jeho odvození (pro konečně mnoho stavů).

14 Fundamentální matice v regulárním MŘ s diskrétním časem, její využití při výpočtu středních dob prvního přechodu (bez důkazů).

15 Limitní chování nerozložitelných MŘ s diskrétním časem, porovnání regulárních a neregulárních řetězců.

16 Modely obnovy selhávajících prvků; způsob využití teorie MŘ, tvar přechodové matice a stacionární věková struktura, modely rozšířené obnovy.

17 MŘ s oceněním přechodů; matice ocenění přechodů, vektor celkových výnosů po n obdobích, naznačení jeho výpočtu v Matlabu/Octave.

18 Asymptotické vlastnosti výnosů v regulárním MŘ s oceněním přechodů, včetně náznaku jejich odvození.

19 Markovský rozhodovací proces s alternativami, vektory optimálních alternativ a postup pro jejich nalezení.

20 Pozitivní rekurence, nulová rekurence a tranzience v MŘ s diskrétním časem; možnosti typů stavů v konečných a (spočetně) nekonečných uzavřených třídách, včetně příkladů.

21 Náhodná procházka po nezáporných celých číslech se stejnými/různými přechodovými pravděpodobnostmi, stacionární rozdělení a jeho (ne)existence.

22 Přechodová funkce a matice intenzit v MŘ se spojitým časem; definice a jednoduchý příklad.

23 Poissonův proces; různé způsoby zavedení Poissonova procesu (pomocí Poissonova rozdělení i bez něj), matice intenzit v Poissonově procesu (bez odvození), rozdělení délky intervalů mezi příchody.

24 Poissonův proces; vztah mezi Poissonovým a exponenciálním rozdělením, limitní vlastnosti počtů příchodů.

25 Stacionární vektor v MŘ se spojitým časem; definice, existence, interpretace, způsob nalezení a věta o konvergenci (bez důkazu).

26 Modely hromadné obsluhy; popis systémů hromadné obsluhy, sledované charakteristiky, Kendallova klasifikace s ilustrativními příklady.

27 Littleův zákon pro modely hromadné obsluhy, náznak jeho využití při odvození průměrných charakteristik v modelu M/M/1.

28 Model M/M/1; matice intenzit, odvození stacionárních pravděpodobností.

29 Model M/M/1; rozdělení doby strávené v systému (s náznakem myšlenky jeho odvození).

30 Procesy množení a zániku; tvar matice intenzit, odvození stacionárních pravděpodobností (s diskuzí jejich existence).

31 Optimalizace v modelech hromadné obsluhy; příklady optimalizačních úloh, využití odvozených charakteristik systémů hromadné obsluhy.

32 Deterministické modely zásob, model EOQ; předpoklady modelu, nákladová funkce, odvození optimálních charakteristik.

33 Deterministické modely zásob, varianta modelu EOQ s přechodným neuspokojením poptávky; předpoklady modelu, nákladová funkce, náznak odvození optimálních charakteristik.

34 Deterministické modely zásob, model POQ (produkčně-spotřební model); předpoklady modelu, nákladová funkce, odvození optimálních charakteristik.

35 Stochastický model řízení zásob s plynulou inventarizací; předpoklady modelu, úroveň obsluhy, stanovení optimální výše bodu znovuobjednávky.

36 Model jednorázově vytvářené zásoby se stochastickou poptávkou (newsvendor model); nákladová funkce, odvození optimální výše zásob pro poptávku se spojitým pravděpodobnostním rozdělením.

Příklady. Následující seznam obsahuje všechny příklady, které jsou obsaženy ve zkouškových otázkách – alespoň co se týče slovního zadání. Konkrétní čísla se mohou (ale nemusí) lišit, rozsah jednotlivých úloh (např. řád použitých přechodových matic) nicméně zůstane stejný. U vypracování příkladů musí být uveden celý korektní postup výpočtu včetně jeho stručného zdůvodnění, nikoli jen samotný výsledek.

1 Najděte příklad MŘ se třemi stavy, který je nerozložitelný a není regulární.

2 Najděte příklad MŘ se třemi stavy, jehož množina stavů lze rozložit na dvě rekurentní komunikační třídy a jednu třídu tranzientních stavů.

3 Je dán MŘ s přechodovou maticí

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Pro všechny stavy určete pravděpodobnost, že systém stráví v daném stavu ještě ∞ mnoho kroků, tj. určete $\Pr\{X_n = i \text{ pro } \infty \text{ mnoho } n \,|\, X_0 = i\}$.

4 Fundamentální matice absorpčního MŘ s tranzientními stavy 1, 2 a 3 má tvar

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{490}\begin{bmatrix} 612 & 54 & 216 \\ 117 & 594 & 171 \\ 162 & 144 & 576 \end{bmatrix}.$$

Určete, za jak dlouho (v průměru) skončí proces v některém z absorpčních stavů, nachází-li se aktuálně ve stavu 3.

5 Je dán absorpční MŘ s přechodovou maticí $\boldsymbol{P}$ a fundamentální maticí $\boldsymbol{N}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{N} = \frac{1}{224}\begin{bmatrix} 280 & 56 & 70 \\ 168 & 392 & 42 \\ 84 & 196 & 245 \end{bmatrix}.$$

Momentálně se proces nachází ve stavu 1. Jaká je pravděpodobnost, že proces nakonec skončí ve stavu 3?

6 MŘ má přechodovou matici

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

Určete, zda je MŘ regulární (a vysvětlete proč).

7 Najděte stacionární vektor pro MŘ s přechodovou maticí

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

8 MŘ má přechodovou matici

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.20 & 0.54 \\ 0.26 & 0.57 & 0.17 \\ 0.12 & 0.28 & 0.60 \end{bmatrix}.$$

Spočtěte $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{A})^2$, kde $\boldsymbol{A}$ je limitní matice, tj. $\boldsymbol{P}^n \to \boldsymbol{A}$ při $n \to \infty$.

9 Stacionární vektor MŘ je $[0.3 \;\; 0.2 \;\; 0.1 \;\; 0.4]$, aktuální stav je 2. Určete, za kolik kroků (v průměru) se proces znovu dostane do stavu 2.

10 Stacionární vektor MŘ je $[4/9 \;\; 4/9 \;\; 1/9]$, fundamentální matice je

$$\boldsymbol{Z} = \frac{1}{81}\begin{bmatrix} 80 & -10 & 11 \\ 8 & 80 & -7 \\ -28 & 44 & 65 \end{bmatrix},$$

aktuální stav je 3. Určete, za kolik kroků (v průměru) se proces dostane do stavu 2.

11 Pravděpodobnosti selhání nové součástky v jednotlivých měsících jejího užívání uvádí následující tabulka:

i	1	2	3	4
Pr{selže během i-tého měsíce}	0.3	0.4	0.2	0.1

Součástky se používají v systému s měsíčními revizemi, při kterých se všechny defektní součástky vymění za nové. Kolik součástek bude třeba každý měsíc měnit (v průměru, při dlouhodobém výhledu)?

12 Pravděpodobnosti selhání nové součástky v jednotlivých měsících jejího užívání uvádí následující tabulka:

i	1	2	3	4
Pr{selže během i-tého měsíce}	0.3	0.4	0.2	0.1

Součástky se používají v systému s měsíčními revizemi, při kterých se všechny defektní součástky vymění za nové. Modelujte situaci pomocí MŘ s diskrétním časem, zapište jeho přechodovou matici.

13 Pravděpodobnosti selhání nové součástky v jednotlivých měsících jejího užívání uvádí následující tabulka:

i	1	2	3	4
Pr{selže během i-tého měsíce}	0	0.7	0	0.3

Součástky se používají v systému s měsíčními revizemi, při kterých se všechny defektní součástky vymění za nové. Je v tomto modelu zajištěna konvergence ke stacionární věkové struktuře?

14 MŘ má přechodovou matici

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Je matice $\boldsymbol{P}^\top - \boldsymbol{I}$ regulární? Jak je tomu pro jiné přechodové matice $\boldsymbol{P}$? Vysvětlete.

15 MŘ má přechodovou matici

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Spočtěte střední dobu prvního přechodu ze stavu 1 do stavu 2.

16 MŘ má přechodovou matici

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Spočtěte střední dobu prvního přechodu ze stavu 1 do stavu 3.

17 Najděte vektor přímých výnosů pro MŘ s přechodovou maticí $\boldsymbol{P}$ a maticí ocenění přechodů $\boldsymbol{R}$, kde

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 10 & -2 \end{bmatrix}.$$

18 Najděte limitní vektor dodatečných výnosů za jedno období pro MŘ s přechodovou maticí $\boldsymbol{P}$ a vektorem přímých výnosů $\boldsymbol{q}$, kde

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

19 MŘ se spojitým časem má matici intenzit

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Proces se aktuálně nachází ve stavu 2. Jaká je pravděpodobnost, že tento stav opustí během následujících 5 časových jednotek?

20 MŘ se spojitým časem má matici intenzit

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Proces se aktuálně nachází ve stavu 1. S jakou pravděpodobností se po prvním nejbližším přechodu bude nacházet ve stavu 2?

21 Najděte stacionární vektor MŘ s maticí intenzit

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

22 Do systému hromadné obsluhy fungujícího v režimu M/M/4/12/∞/FIFO přicházejí požadavky v intervalech o průměrné délce 3 minuty. Z dlouhodobého sledování systému plyne, že průměrná délka fronty je 4 požadavky. Jaká je průměrná doba strávená v systému jedním požadavkem?

23 Intenzita provozu v M/M/1 modelu je 3/4. Jaká je průměrná vytíženost obslužného zařízení?

24 Intenzita provozu v M/M/1 modelu je 4/5. Jaká je pravděpodobnost výskytu fronty (v nahodilém okamžiku)?

25 Intenzita provozu v M/M/1 modelu je 0.8. Jaká je pravděpodobnost výskytu fronty delší než 2 (v nahodilém okamžiku)?

26 Požadavek přichází v nahodilém okamžiku do systému M/M/1 s intenzitou příchodu 1 požadavek za minutu a intenzitou obsluhy 2 požadavky za minutu. Jaká je pravděpodobnost, že zkoumaný požadavek stráví v systému méně než 2 minuty? (Nemusíte dopočítat konkrétní číslo, stačí zapsat příslušný výraz, který by bylo možné vyčíslit na běžné kalkulačce.)

27 Do pobočky jisté banky přichází v průměru 25 klientů za hodinu, režim příchodů odpovídá Poissonovu procesu a odbavení klientů probíhá jako v modelu M/M/5, přičemž délka obsluhy na jedné přepážce trvá v průměru 12 minut. Je splněna podmínka stabilizace systému?

28 Poptávka po sezónním zboží má podle expertních odhadů rovnoměrné rozdělení od 101 do 200 kusů. Zboží nakupuje firma od výrobce za 300 Kč, prodává za 500 Kč a v případě, že se zboží tuto sezónu neprodá, musí být ekologicky zlikvidováno za dodatečných 50 Kč na kus. Najděte optimální velikost objednávky.