# Stochastické modely: prezentace k přednášce

Jan Zouhar

Katedra ekonometrie FIS VŠE v Praze

16. února 2017

## Obsah

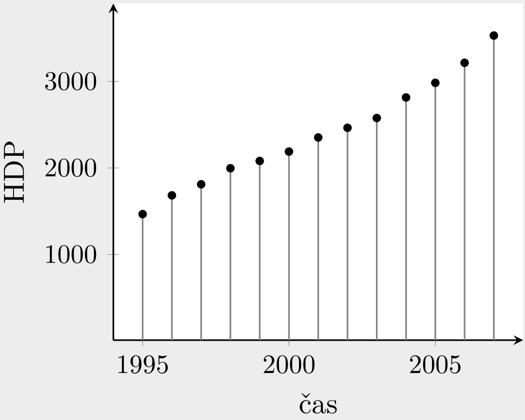
# Obsah

# Náhodné procesy

- v ekonomice se často sleduje časový vývoj veličin (HDP, směnný kurz, tržby, stav zásob)
- nejistota modelována jako náhoda

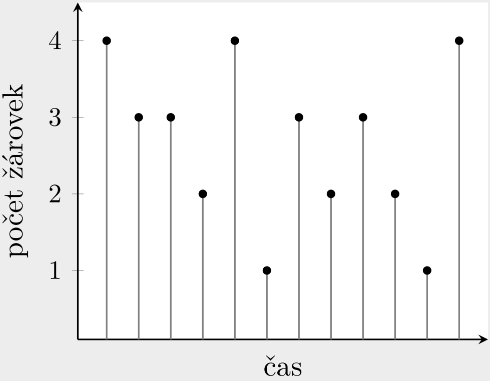
# Náhodné procesy (pokrač.)

## HDP ČR v letech 1995–2007 (mld. Kč, běžné ceny)



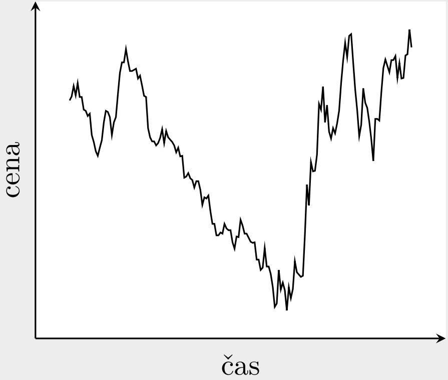
# Náhodné procesy (pokrač.)

## Počet vyměněných žárovek v jednotlivých měsících



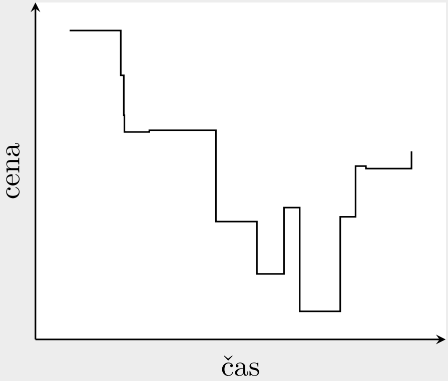
# Náhodné procesy (pokrač.)

## Vývoj ceny akcie



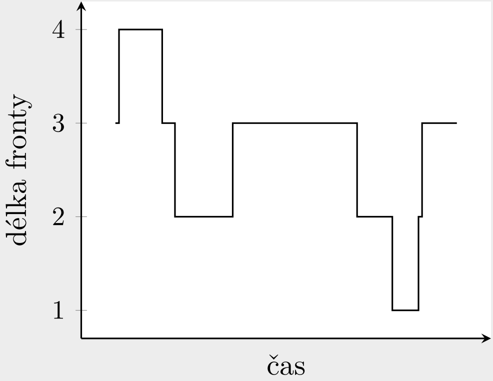
# Náhodné procesy (pokrač.)

## Vývoj ceny akcie – detail



# Náhodné procesy (pokrač.)

## Počet lidí ve frontě



## Náhodné procesy (pokrač.)

Některé rozdíly:

- pojetí času: roční (HDP), měsíční (tržby), denní (EUR/CZK), kontinuelní (fronta)
- škála možných hodnot: spojitá (HDP, EUR/CZK, tržby), diskrétní (fronta)

→ různé modelové přístupy

| | čas | |
|---|---|---|
| stavy | spojitý | diskrétní |
| spojité | akcie | HDP |
| diskrétní | fronta | žárovky |

## Matematické okénko

Konečná, spočetná a nespočetná množina:

- spočetná i nespočetná množina mohou mít nekonečně mnoho prvků
- není ale $\infty$ jako $\infty$: nespočetné množiny jsou „mnohem větší"
- prvky spočetné množiny lze spočítat, tj. očíslovat přirozenými čísly
- přesněji: $A$ je spočetná, pokud existuje prosté zobrazení $A \to \mathbb{N}$
- příklady spočetných množin: všechny konečné množiny, celá čísla, racionální čísla
- příklady nespočetných množin: reálná čísla ($\mathbb{R}$), interval $[0, 1]$, množina všech podmožin $\mathbb{N}$, tj. $2^{\mathbb{N}}$

# Náhodný proces

## Definice

*Náhodným procesem* rozumíme posloupnost náhodných veličin

- indexovaných prvky z *množiny časů* $T$ (zpravidla buď $\mathbb{Z}_+$ nebo $\mathbb{R}_+$),
- s hodnotami v *množině stavů* $S$.

Máme-li náhodný proces $X$, píšeme formálně $X = \{X_t : t \in T\}$, kde $X_t$ je náhodná veličina s oborem hodnot v $S$ pro všechna $t \in T$.

- Je-li $T \subseteq \mathbb{Z}$, hovoříme o *procesu s diskrétním časem*, je-li $T$ interval z $\mathbb{R}$, mluvíme o *procesu se spojitým časem*.
- Je-li $S$ konečná nebo spočetná, hovoříme o *procesu s diskrétními stavy*, je-li $S$ interval z $\mathbb{R}$, mluvíme o *procesu se spojitými stavy*.

## Příklad: Počasí v zemi Oz

Počasí v zemi Oz se řídí následujícími pravidly:

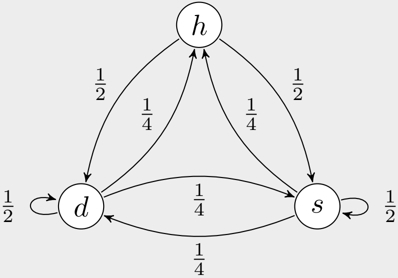
- je vždy buď hezky ($h$), déšť ($d$) nebo sníh ($s$),
- je-li dnes hezky, zítra nebude; se stejnou p-stí prší a sněží,
- je-li dnes ošklivo, bude zítra s 50% p-stí stejně; vyjasní se ($h$) pouze ve čtvrtině případů.

Dnes prší. Jaká je p-st, že bude...

- zítra sněžit? $p_{ds}$
- pozítří sněžit? $p_{ds}^{(2)}$
- pozítří hezky? $p_{dh}^{(2)}$
- popozítří hezky? $p_{dh}^{(3)}$

# Příklad: Počasí v zemi Oz (pokrač.)

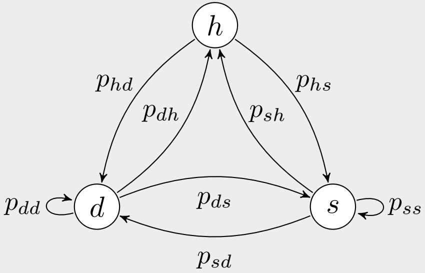
## Přechodový graf




$$p_{ds}^{(2)} = \Pr\{d \to h \to s\} + \Pr\{d \to d \to s\} + \Pr\{d \to s \to s\}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

# Příklad: Počasí v zemi Oz (pokrač.)

## Přechodový graf (obecněji)




Zavedeme množinu možných stavů počasí $S = \{h, d, s\}$.

$$p_{ds}^{(2)} = p_{dh}\, p_{hs} + p_{dd}\, p_{ds} + p_{ds}\, p_{ss} = \sum_{i \in S} p_{di}\, p_{is}$$

$$p_{dh}^{(2)} = p_{dh}\, p_{hh} + p_{dd}\, p_{dh} + p_{ds}\, p_{sh} = \sum_{i \in S} p_{di}\, p_{ih}$$

## Příklad: Počasí v zemi Oz (pokrač.)

Řešení pro $p_{dh}^{(3)}$ tímto zápisem nepřehledné, ale postup je zřejmý:

### Definice

*Hodnotou cesty* v přechodovém grafu rozumíme součin ohodnocení hran podél této cesty. *Délkou cesty* rozumíme počet prošlých šipek (jedna šipka může být započtena vícekrát).

### Pozorování

$p_{ij}^{(n)}$ je součet hodnot všech alternativních cest $i \to \ldots \to j$ délky $n$.

Pro velká $n$ je ale tento postup nepraktický. Zkusme to jinak.

## Příklad: Počasí v zemi Oz (pokrač.)

Zavedeme *přechodovou matici* $\boldsymbol{P} = [p_{ij}]_{i,j \in S}$:

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ h \\ d \\ s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h & d & s \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{hh} & p_{hd} & p_{hs} \\ p_{dh} & p_{dd} & p_{ds} \\ p_{sh} & p_{sd} & p_{ss} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ h \\ d \\ s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h & d & s \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Máme $p_{ds}^{(2)} = \sum_{i \in S} p_{di}\, p_{is}$ a $p_{dh}^{(2)} = \sum_{i \in S} p_{di}\, p_{ih}$.

### Pozorování

$p_{ij}^{(2)}$ je rovno prvku na pozici $(i, j)$ v matici $\boldsymbol{P}^2$.

## Příklad: Počasí v zemi Oz (pokrač.)

Pozorování snadno zobecníme:

$$\underbrace{i \to \ldots \to j}_{\text{3 šipky}} = i \to \underbrace{k \to \ldots \to j}_{\text{2 šipky}} \text{ pro nějaké } k \in S,$$

tedy

$$p_{ij}^{(3)} = \sum_{k \in S} p_{ik} p_{kj}^{(2)} = \text{ prvek } (i,j) \text{ matice } \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}^3,$$

stejně pro $p_{ij}^{(n)}$ (indukce).

**Pozorování**

$p_{ij}^{(n)}$ je rovno prvku na pozici $(i,j)$ v matici $\boldsymbol{P}^n$.

## Příklad: Počasí v zemi Oz (pokrač.)

Podívejme se na předpovědi na více dní dopředu:

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{bmatrix} .2500 & .3750 & .3750 \\ .1875 & .4375 & .3750 \\ .1875 & .3750 & .4375 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}^3 = \begin{bmatrix} .1875 & .4063 & .4063 \\ .2031 & .4063 & .3906 \\ .2031 & .3906 & .4063 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^4 = \begin{bmatrix} .2031 & .3984 & .3984 \\ .1992 & .4023 & .3984 \\ .1992 & .3984 & .4023 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}^5 = \begin{bmatrix} .1992 & .4004 & .4004 \\ .2002 & .4004 & .3994 \\ .2002 & .3994 & .4004 \end{bmatrix}$$

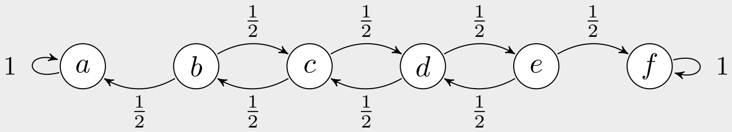
$$\boldsymbol{P}^7 = \begin{bmatrix} .2000 & .4000 & .4000 \\ .2000 & .4000 & .4000 \\ .2000 & .4000 & .4000 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P}^9 = \begin{bmatrix} .2000 & .4000 & .4000 \\ .2000 & .4000 & .4000 \\ .2000 & .4000 & .4000 \end{bmatrix}$$

Dlouhodobá předpověď nezáleží na aktuálním stavu!

# Příklad: Opilcova procházka

Opilec se v alkoholovém opojení náhodně potácí od lampy k lampě, ocitne-li se doma ($a$) nebo v baru ($f$), jeho cesta končí.

## Přechodový graf




$$
\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

## Příklad: Opilcova procházka (pokrač.)

Dříve či později zakotví opilec v baru nebo doma, p-st se jistě liší podle aktuální pozice.

$$\boldsymbol{P}^n \to \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ 3/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/5 \\ 2/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/5 \\ 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{při } n \to \infty.$$

Další otázky:

- Jak dlouho v průměru opilec bloudí?
- Kolikrát v průměru navštíví lampu $c$?

## Matematické okénko

Počítání s p-stmi a podmíněnými p-stmi ($A, B$ atd. jsou *jevy*):

| | |
|---|---|
| $A, B$ neslučitelné: | $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$ |
| $B$ možný: | $\Pr\{A \mid B\} = \dfrac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{B\}}$ |
| $B, C$ možné: | $\Pr\{A \cap B \mid C\} = \Pr\{A \mid B \cap C\} \Pr\{B \mid C\}$ |
| $B_i$ neslučitelné možné, $\bigcup_i B_i$ jistý: | $\Pr\{A\} = \sum_i \Pr\{A \cap B_i\} = \sum_i \Pr\{A \mid B_i\} \Pr\{B_i\}$ |
| $B_i$ neslučitelné možné, $\bigcup_i B_i$ jistý, $C$ možný: | $\Pr\{A \mid C\} = \sum_i \Pr\{A \cap B_i \mid C\} = \sum_i \big(\Pr\{A \mid B_i \cap C\} \times \Pr\{B_i \mid C\}\big)$ |

K pochopení pomohou Vennovy diagramy.

## Zpátky k počasí v zemi Oz

Poslední vztah je přesně to, co jsme používali:

$$
\begin{aligned}
p_{dh}^{(2)} &= \Pr\{\text{pozítří } h \,|\, \text{dnes } d\} \\
&= \sum_{i \in S} \Pr\{\text{pozítří } h \,|\, \text{zítra } i, \text{dnes } d\} \Pr\{\text{zítra } i \,|\, \text{dnes } d\} \\
&= \sum_{i \in S} \Pr\{\text{pozítří } h \,|\, \text{zítra } i\} \Pr\{\text{zítra } i \,|\, \text{dnes } d\} \\
&= \sum_{i \in S} p_{di}\, p_{ih},
\end{aligned}
$$

přičemž třetí rovnost platí proto, že přechodové p-sti záleží pouze na aktuálním stavu, nikoli na tom, co mu předcházelo – tomu budeme říkat *markovská vlastnost*.

## Zpátky k počasí v zemi Oz (pokrač.)

Označíme-li průběh počasí jako $X$, můžeme přepsat (přesněji, ale méně přehledně) jako:

$$\begin{aligned} p_{dh}^{(2)} &= \Pr\left\{X_{\text{pozítří}} = h \,|\, X_{\text{dnes}} = d\right\} \\ &= \dots \\ &= \sum_{i \in S} \Pr\left\{X_{\text{pozítří}} = h \,|\, X_{\text{zítra}} = i\right\} \Pr\left\{X_{\text{zítra}} = i \,|\, X_{\text{dnes}} = d\right\}. \end{aligned}$$

Toto značení využijeme v následující definici.

# Markovská vlastnost, markovský řetězec

## Definice

Řekneme, že proces $X = \{X_t : t \in T\}$ má *markovskou vlastnost* (je *markovský*), pokud budoucí vývoj závisí pouze na aktuálním stavu, nikoli na tom, jak se k tomuto stavu došlo; přesněji řečeno, pro libovolné posloupnosti stavů $i_0, \ldots, i_{n+1}$ a časů $t_0 \leq \ldots \leq t_{n+1}$ platí

$$\begin{aligned}\Pr\left\{X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_0} = i_0\right\} \\ = \Pr\left\{X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \,\middle|\, X_{t_n} = i_n\right\}.\end{aligned}$$

## Definice

*Markovským řetězcem* (MŘ) rozumíme náhodný proces s diskrétními stavy, který má markovskou vlastnost.

# Příklad: Mince z klobouku

Zadání. Náhodný proces:

- v klobouku mince v hodnotě 1, 2 a 5 Kč, po pěti kusech od každé
- v každém kole náhodně vytáhneme jednu minci
- $X_n$ = celková hodnota vytažených peněz po $n$ kolech

Kolik má proces možných stavů? Je proces markovský?

Řešení. Stavů je očividně 41. Proces *není* markovský:

- uvažujme sekvence $A = 511111$ a $B = 222211$
- $\Pr\{X_7 = 11 \,|\, X_6 = 10, A\} = 0$ (došly mince 1 Kč)
- $\Pr\{X_7 = 11 \,|\, X_6 = 10, B\} > 0$ (může nastat)

## Příklad: Mince z klobouku (pokrač.)

Poznámka:

- stejný experiment s mincemi lze popsat i pomocí MŘ
- stačí volit za $S$ množinu trojic počtů mincí (5 Kč, 2 Kč, 1 Kč)
- při jevu $A$ máme $X_6 = (1, 0, 5)$, při $B$ máme $X_6 = (0, 4, 2)$
- počet stavů vzroste na $6^3 = 216$, ale je zde markovská vlastnost

## Úmluva o značení

Typografické rozlišení podle typu matematického objektu:

| příklad | písmo | objekt |
|---|---|---|
| $S, T, X$ | velké | množiny a náhodné veličiny |
| $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A}$ | velké tučné | matice |
| $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\pi}$ | malé tučné | vektory |
| $i, j, x$ | malé | čísla (reálná nebo celá) |

Některá písmena budou mít vždy stejný význam:

$$\begin{aligned} S &= \text{množina stavů} \\ T &= \text{množina časů} \\ i, j &= \text{stavy} \\ t &= \text{čas} \end{aligned}$$

## Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnice

### Věta (Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnice)

Uvažujme MŘ $X$. Pro dva časy $t < u$ označme $p_{ij}(t,u) = \Pr\{X_u = j \mid X_t = i\}$ a $\boldsymbol{P}(t,u) = [p_{ij}(t,u)]_{i,j \in S}$. Potom přechodové p-sti splňují pro libovolné časy $t < u < v$

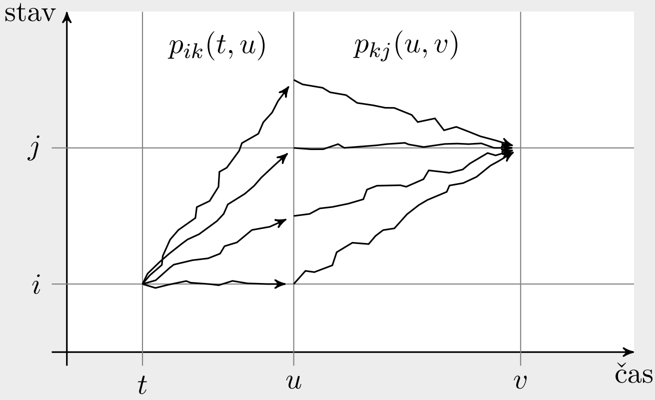
$$\boldsymbol{P}(t,v) = \boldsymbol{P}(t,u)\boldsymbol{P}(u,v).$$

*Důkaz.* Ve třetí rovnosti užijeme markovskou vlastnost:

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t,v) &= \Pr\{X_v = j \mid X_t = i\} \\
&= \textstyle\sum_{k \in S} \Pr\{X_v = j \mid X_u = k, X_t = i\} \Pr\{X_u = k \mid X_t = i\} \\
&= \textstyle\sum_{k \in S} \Pr\{X_v = j \mid X_u = k\} \Pr\{X_u = k \mid X_t = i\} \\
&= \textstyle\sum_{k \in S} p_{ik}(t,u) p_{kj}(u,v) \\
&= \text{prvek } (i,j) \text{ v matici } \boldsymbol{P}(t,u)\boldsymbol{P}(u,v).
\end{aligned}$$

## Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnice (pokrač.)

### Ilustrace Ch-K rovnic



## Homogenní MŘ

V našich příkladech se přechodové p-sti v čase neměnily – na takové procesy se omezíme v celém kurzu (kromě následujícího příkladu).

### Definice

Řekneme, že MŘ $X$ je homogenní, pokud se podmíněné p-sti přechodu nemění v čase, tj. pokud platí

$$\Pr\{X_{u+t} = j \mid X_u = i\} = \Pr\{X_t = j \mid X_0 = i\}$$

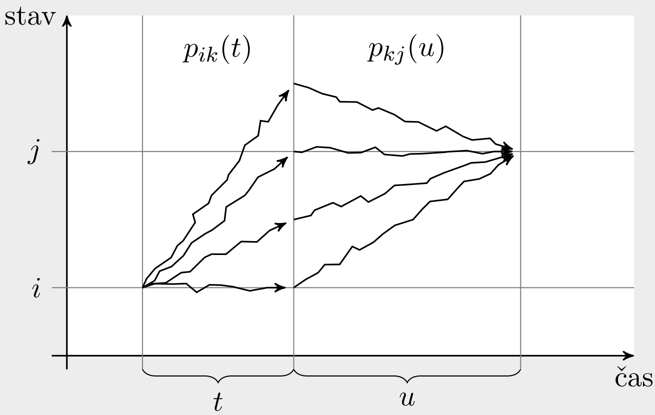
pro libovolné časy $t, u$. (Automaticky předpokládáme, že $T$ obsahuje 0 a $u + t$.) Výše uvedenou p-st zapisujeme stručně jako $p_{ij}(t)$.

### Poznámka

Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnice v homogenních MŘ můžeme zapsat ve tvaru $\boldsymbol{P}(t + u) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(u)$.

# Homogenní MŘ (pokrač.)

## Ilustrace Ch-K rovnic v homogenním MŘ



## Příklad: Nehomogenní počasí v zemi Oz

Vlivem globálního oteplování se v zemi Oz postupně snižuje p-st sněhu ve prospěch deště:

$$\boldsymbol{P}(n, n+1) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} h & d & s \end{array} \\ \begin{array}{c} h \\ d \\ s \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1/2 + f(n) & 1/2 - f(n) \\ 1/4 & 1/2 + f(n)/2 & 1/4 - f(n)/2 \\ 1/4 & 1/4 + f(n) & 1/2 - f(n) \end{bmatrix} \end{array},$$

kde $f(n) = n/(2n + 100\,000)$. Pro $n = 0$ máme přechodovou matici jako předtím a např. za cca 68 let je to

$$\boldsymbol{P}(25\,000, 25\,001) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} h & d & s \end{array} \\ \begin{array}{c} h \\ d \\ s \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 7/12 & 1/6 \\ 1/4 & 5/12 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

## Obsah

## Značení a terminologie

- množina časů bude (skoro) vždy $\mathbb{Z}_+$, aktuální čas zpravidla 0, odpovídá mu n.v. $X_0$
- délku jednotkového časového intervalu budeme nejčasteji označovat jako *krok*
- množina $S$ je konečná, počet stavů budeme značit $s$, v případě potřeby budeme stavy číslovat $1, \ldots, s$ nebo $0, \ldots, s-1$
- přechodové p-sti za $n$ kroků značíme $p_{ij}^{(n)}$ [při spojitém času se značí $p_{ij}(t)$]
- $p_{ij}^{(1)}$ zkracujeme jako $p_{ij}$ (jako v předchozích příkladech)
- matice $\boldsymbol{P} = [p_{ij}]_{i,j \in S}$ se nazývá *matice podmíněných p-stí přechodu* nebo stručně *přechodová matice*
- *přechodový graf* MŘ je graf, jehož uzly představují stavy MŘ a kde $i \to j$, pokud $p_{ij} > 0$; jde o vážený orientovaný graf s vahami $p_{ij}$

## Značení a terminologie (pokrač.)

### Definice

*Pravděpodobnostním vektorem* rozumíme řádkový vektor (konečné nebo nekonečné délky), jehož složky jsou nezáporné a sčítají se do jedné.

- p-stní vektory tedy popisují diskrétní rozdělení na konečné nebo spočetné množině
- p-stní vektory budeme vždy značit řeckými písmeny (na rozdíl od ostatních, vždy sloupcových vektorů)
- p-stní vektor popisující rozdělení pro $X_n$ budeme značit $\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \left[\pi_i^{(n)}\right]_{i \in S}$, někdy se nazývá *vektor absolutních p-stí*
- $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$ je aktuální, tzv. *počáteční rozdělení*; značíme též jen $\boldsymbol{\pi}$
- je-li dnes v zemi Oz hezky, máme např.

$$\boldsymbol{\pi}^{(0)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h & d & s \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \boldsymbol{\pi}^{(1)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h & d & s \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

# Některé základní vztahy

## Pozorování

1. Prvek $(i, j)$ matice $\boldsymbol{P}^n$ je $p_{ij}^{(n)}$.
   (Víme už od Počasí v zemi Oz.)
2. $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ pro libovolné $i$, tj. řádky matice $\boldsymbol{P}$ jsou p-stní vektory.
   (Někam se z $i$ prostě dostat musím.)
3. Jinak řečeno, $\boldsymbol{P}\mathbf{1} = \mathbf{1}$.
4. Má-li vektor $\boldsymbol{v}$ všechny složky stejné, pak $\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.
   (Je vlastně $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v \\ \vdots \\ v \end{bmatrix} = v\mathbf{1}$.)
5. $\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(n-1)}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}^{(n-2)}\boldsymbol{P}^2 = \ldots = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}^n$.
   (Lehké zobecnění bodu 1.)

# Rekurentní vs. tranzientní stavy

## Definice

Řekneme, že stav $i$ je *rekurentní*, pokud

$$\Pr\{X_n = i \text{ pro nějaké } n \geq 1 \,|\, X_0 = i\} = 1,$$

tj. pokud se MŘ, který je aktuálně v $i$, do tohoto stavu s p-stí 1 dříve či později navrátí. V opačném případě mluvíme o stavu *tranzientním*.

Poznámka:

- rekurenci a tranzienci lze ekvivalentně zavést následovně:

$$\Pr\{X_n = i \text{ pro } \infty \text{ mnoho } n \,|\, X_0 = i\} = \begin{cases} 1 & \text{pro rekurentní } i \\ 0 & \text{pro tranzientní } i \end{cases}$$

# Periodické stavy

## Definice

*Periodou stavu* $i$ rozumíme číslo $\mathrm{nsd}\{n > 0 | p_{ii}^{(n)} > 0\}$.

Poznámky:

- přehlednější definice pomocí přechodového grafu: perioda = nsd délek různých cest z $i$ do $i$
- aby byla definice univerzálně použitelná, je třeba dodefinovat $\mathrm{nsd}\{\} = 1$
- stavy s periodou 1 jsou *neperiodické*

Příklady:

- Kyvadlo: $\boldsymbol{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{levá} & \text{pravá} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{levá} \\ \text{pravá} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$
- Náhodná procházka po kružnici (sudý vs. lichý počet stavů).

# Rozložitelnost řetězce

## Definice

Stav $j$ *je dosažitelný ze stavu* $i$, píšeme $i \to j$, pokud $p_{ij}^{(n)} > 0$ pro nějaké $n \geq 0$, tj. pokud v přechodovém grafu vede cesta z $i$ do $j$. Řekneme, že $i$ a $j$ *spolu komunikují*, píšeme $i \leftrightarrow j$, pokud $i \to j$ a $j \to i$.

Relace $\leftrightarrow$ je

- *reflexivní*, neboť zřejmě $i \leftrightarrow i$,
- *symetrická*, neboť $i \leftrightarrow j \Longrightarrow j \leftrightarrow i$,
- *tranzitivní*, neboť $(i \leftrightarrow k)$ & $(k \leftrightarrow j) \Longrightarrow i \leftrightarrow j$ (spojí se příslušné cesty v grafu).

Jde tedy o relaci *ekvivalence*, vymezuje *komunikační třídy* v MŘ.

## Rozložitelnost řetězce (pokrač.)

Poznámky:

- Všechny stavy spolu komunikují $\Rightarrow$ jedna komunikační třída $\Rightarrow$ *nerozložitelný* řetězec.
- Periodicita a tranzience jsou třídové vlastnosti.
- Dvě třídy – buď lze zkoumat odděleně, nebo jdou šipky mezi třídami jedním směrem (*rekurentní* a *tranzientní* třída).
- Množinu stavů lze jednoznačně rozložit ve tvaru

$$S = Tr \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots,$$

kde $Tr$ je množina tranzientních stavů a $C_i$ jsou uzavřené komunikační třídy rekurentních stavů (uzavřené = nevedou z nich šipky).

# Absorpční řetězce

**Definice**

*Absorpčním stavem* rozumíme stav, který MŘ po dosažení již neopustí. Jinými slovy, stav $i$ je *absorpční*, pokud $p_{ii} = 1$.

**Definice**

Řekneme, že MŘ je *absorpční*, pokud má aspoň jeden absorpční stav a z libovolného stavu je dosažitelný nejméně jeden absorpční stav.

Příklady:

- Opilcova procházka.
- „Tak dlouho se chodí se džbánem pro vodu, až se ucho utrhne.“

Stavy absorpčního řetězce, které nejsou absorpční, jsou nutně *tranzientní*.

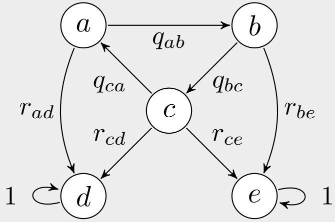
# Kanonický tvar přechodové matice absorpčního MŘ

Vhodným seřazením stavů lze přechodovou matici dostat do tzv. *kanonického tvaru*:

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{r} \\ \text{tranzientní stavy} \\ \text{absorpční stavy} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{tranz.} & \text{abs.} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{array}\right] \end{array}.$$

# Příklad absorpčního řetězce

## Přechodový graf

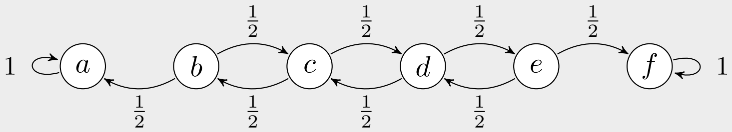



$$
\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|cc}
0 & q_{ab} & 0 & r_{ad} & 0 \\
0 & 0 & q_{bc} & 0 & r_{be} \\
q_{ca} & 0 & 0 & r_{cd} & r_{ce} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
= \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{R} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}
$$

# Příklad: Opilcova procházka

Opilec se v alkoholovém opojení náhodně potácí od lampy k lampě, ocitne-li se doma ($a$) nebo v baru ($f$), jeho cesta končí.

## Přechodový graf




$$
\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

# Kanonický opilec

Kanonický tvar opilcovy přechodové matice:

$$
\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ a \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} b & c & d & e & f & a \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

# Matematické okénko: blokové násobení matic

Jsou-li matice v následujících zápisech konformní vůči použitých operacím maticového součinu, platí:

1. $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{AC}\end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D}\end{bmatrix} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BD}$.
3. $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{AU} + \boldsymbol{BX} & \boldsymbol{AV} + \boldsymbol{BY} \\ \boldsymbol{CU} + \boldsymbol{DX} & \boldsymbol{CV} + \boldsymbol{DY}\end{bmatrix}$

Vlastně formálně násobíme, jako by šlo o skaláry!

# Blokové mocnění matice v kanonickém tvaru

Snadno blokově vynásobíme

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{array}{r} \\ \text{tranzientní stavy} \\ \text{absorpční stavy} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{tranz.} & \text{abs.} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^2 & (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Indukcí lze snadno ukázat (zkuste si!), že

$$\boldsymbol{P}^n = \begin{array}{r} \\ \text{tranzientní stavy} \\ \text{absorpční stavy} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{tranzientní} & \text{absorpční} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^n & (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}+\ldots+\boldsymbol{Q}^{n-1})\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \end{array}.$$

# Věta o mizejících p-stech tranzientních stavů

**Věta (o mizejících p-stech tranzientních stavů)**

Pravděpodonost, že proces skončí v některém absorpčních stavů, je 1. Jinými slovy, $\boldsymbol{Q}^n \to \mathbf{0}$ při $n \to \infty$.

*Důkaz.*

- označme $k_i$ nejmenší počet kroků, za který se lze z tranzientního $i$ dostat do některého z absorpčních stavů,
- největší $k_i$ označme jako $k$,
- označme p-st absorpce z tranzientního $i$ během $k$ kroků jako $p_i$,
- nejmenší $p_i$ označme jako $p$,
- p-st, že proces *nebude* během $k$ kroků absorbován, je jistě menší než $1-p$ (nehledě na akuální stav),
- po $2k$ krocích je to méně než $(1-p)^2$ atd.,
- pro $k$-násobky kroků tedy konverguje p-st k nule,
- p-st neabsorpce je v čase monotónně klesající.

## Fundamentální matice absorpčního řetězce

### Věta (o fundamentální matici absorpčního MŘ)

1. Matice $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}$ je v libovolném absorpčním MŘ regulární; matici $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}$ říkáme *fundamentální matice* daného MŘ.
2. $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 + \dots$.
3. Prvek $(i, j)$ v matici $\boldsymbol{N}$ udává střední počet průchodů stavem $j$, je-li aktuální stav $i$. (Při $i = j$ se počítá i výchozí stav.)

*Důkaz.*

1. Ukážeme, že sloupce $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}$ jsou LN.
   - Nechť $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
   - Potom $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$, tj. (iterativním dosazením) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}^n\boldsymbol{x}$ pro libovolné $n$.
   - Jelikož $\boldsymbol{Q}^n \to \boldsymbol{0}$, je nutně $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

## Fundamentální matice absorpčního řetězce (pokrač.)

2. Ukážeme, že $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 + \ldots$.
   - Snadno ověříme, že $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}^n = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q} + \ldots + \boldsymbol{Q}^{n-1})$.
   - Stačí vynásobit zleva $\boldsymbol{N}$ a pak poslat $n \to \infty$.
3. Tvzení o středním počtu průchodů tranzientním stavem $j$ z aktuálního tranzientního stavu $i$.
   - Pro $k = 0, 1, \ldots$ zavedeme
   $$Y^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{je-li MŘ po } k \text{ krocích ve stavu } j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
   - Je tedy $\mathsf{E}(Y^{(k)}) = \Pr\left\{Y^{(k)} = 1\right\} = p_{ij}^{(k)} = \text{ prvek } (i,j) \text{ v } \boldsymbol{Q}^k$.
   - Střední počet průchodů stavem $j$ v prvních $n$ krocích je
   $$\mathsf{E}\left(Y^{(0)} + Y^{(1)} + \ldots + Y^{(n)}\right) = \text{ prvek } (i,j) \text{ v } \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q} + \ldots + \boldsymbol{Q}^n.$$
   - Pošleme $n \to \infty$ a jsme hotovi.

# Opilcova fundamentální matice

Z kanonického tvaru přechodové matice máme

$$\boldsymbol{Q} = \begin{array}{c} \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \text{tedy}$$

$$\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{array}{c} \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.6 & 1.2 & 0.8 & 0.4 \\ 1.2 & 2.4 & 1.6 & 0.8 \\ 0.8 & 1.6 & 2.4 & 1.2 \\ 0.4 & 0.8 & 1.2 & 1.6 \end{bmatrix} \end{array}.$$

- Kolikrát (v průměru) navštíví opilec $c$, začíná-li v $b$?
- Kolikrát (v průměru) navštíví opilec $b$, začíná-li v $c$?

# Střední počet průchodů tranzientními stavy

- Jak dlouho opilec bloudí (průměrně), začíná-li v $b$?
- Stačí sečíst, kolikrát navštíví jednotlivé tranzientní stavy.

**Pozorování**

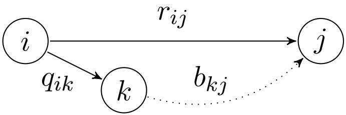
Mějme absorpční MŘ v aktuálním stavu $i$. Průměrná doba před absorpcí, neboli střední počet průchodů tranzientními stavy, odpovídá součtu $i$-tého řádku $\boldsymbol{N}$, neboli vektoru $\boldsymbol{N}\mathbf{1}$.

## Pravděpodobnost absorpce konkrétním stavem

### Věta (o pravděpodobnostech absorpce)

Označme $b_{ij}$ p-st, že MŘ, který se nyní nachází v tranzientním stavu $i$, bude nakonec absorbován stavem $j$, a položme $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$. Potom $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{R}$.

*Důkaz.* Mohu jít buď přímo, nebo přes jiný tranzientní stav $k$:




$$\Longrightarrow \quad b_{ij} = r_{ij} + \textstyle\sum_{k \in Tr} q_{ik} b_{kj}$$

Maticově zapsáno

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{R} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}, \qquad \text{čili} \\ (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{R}, \\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{N}\boldsymbol{R}. \end{aligned}$$

## Alternativní odvození

Součet hodnot cest podle délky $n$ a posledního tranzientního stavu $k$:

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, dotted, "p_{ik}^{(n)}"] & k \arrow[r, "r_{kj}"] & j \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in Tr} p_{ik}^{(n)} r_{kj} \\
&= \sum_{k \in Tr} \underbrace{\left( \sum_{n=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} \right)}_{\text{prvek } (i,k) \text{ v } \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{Q}^n = n_{ik}} r_{kj} \\
&= \sum_{k \in Tr} n_{ik} r_{kj} \\
&= \text{ prvek } (i,j) \text{ v } \boldsymbol{NR}.
\end{aligned}$$

# Ještě jedno odvození pomocí cest v grafu

## Pozorování

P-st, že MŘ nacházející se aktuálně ve stavu $i$ skončí v absorpčním stavu $j$, je součet hodnot všech alternativních cest z $i$ do $j$, které nevedou přes smyčku v $j$.

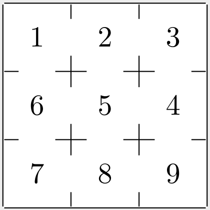
- zavedeme $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$, čili matici vah pro graf bez smyček
- prvek $(i, j)$ v $\boldsymbol{M}^k$ obsahuje součty vah cest délky $k$ z $i$ do $j$
- tedy chceme prvek $(i, j)$ v $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^2 + \ldots = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1}$
- ověříme snadno blokovým součinem, že

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})^{-1} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1} & (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N} & \boldsymbol{N}\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$

# Trik „zabsorpčnění“

Zodpovězení některých otázek ohledně obecných MŘ lze řešit převodem na absorpční MŘ. Příklad:

## Myší labyrint




Myš se náhodně pohybuje v labyrintu – z každé komůrky volí všechny východy se stejnými p-stmi.

# Trik „zabsorpčnění“ (pokrač.)

Máme tedy MŘ s přechodovou maticí

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Otázka: Myš je aktuálně na pozici 1, na 5 je sýr; jak dlouho (v průměru) potrvá, než se myš najde?

## Trik „zabsorpčnění“ (pokrač.)

Stačí udělat ze stavu 5 absorpční:

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Odtud již snadno spočteme fundamentální matici atd.

# Trik „zabsorpčnění“ (pokrač.)

$$
\boldsymbol{N} = \frac{1}{8}\;
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
14 & 9 & 4 & 3 & 9 & 4 & 3 & 2 \\
6 & 14 & 6 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\
4 & 9 & 14 & 9 & 3 & 2 & 3 & 4 \\
2 & 4 & 6 & 14 & 2 & 2 & 4 & 6 \\
6 & 4 & 2 & 2 & 14 & 6 & 4 & 2 \\
4 & 3 & 2 & 3 & 9 & 14 & 9 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 14 & 6 \\
2 & 3 & 4 & 9 & 3 & 4 & 9 & 14
\end{bmatrix}
\end{array},
\quad \boldsymbol{N}\mathbf{1} =
\begin{array}{c}
1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9
\end{array}
\begin{bmatrix}
6 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 6
\end{bmatrix}.
$$

Některé výsledky zřejmé ze symetrie, jiné nikoli (třeba diagonála $\boldsymbol{N}$).

# Regulární řetězce

## Definice

Řekneme, že MŘ je *regulární*, pokud má některá mocnina jeho přechodové matice samé kladné prvky. (Jinými slovy, všechny prvky $\boldsymbol{P}^n$ jsou větší než nula pro nějaké $n$.)

Poznámky:

- Je vidět, že regulární MŘ nemůže být rozložitelný (tedy ani absorpční), ani periodický.
- Má-li $\boldsymbol{P}^n$ samé kladné prvky, má zřejmě samé kladné prvky i $\boldsymbol{P}^{n+1}$. (Proč?)
- Stačí se tedy podívat na dostatečně vysokou mocninu.
- Bylo dokázáno, že v regulárním MŘ o $s$ stavech musí mít nenulové prvky $\boldsymbol{P}^n$ pro $n \geq s^2 - 2s + 1$.

## Věta o limitě mocnin přechodové matice

U počasí v zemi Oz jsme viděli, že

$$\boldsymbol{P}^n \to \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} h & d & s \end{array} \\ \begin{array}{c} h \\ d \\ s \end{array} & \begin{bmatrix} .2 & .4 & .4 \\ .2 & .4 & .4 \\ .2 & .4 & .4 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{při } n \to \infty,$$

tedy $p_{ij}^{(n)}$ nezáleží pro velká $n$ na $i$ atd.

Podobné vztahy platí pro *všechny* regulární MŘ!

## Věta o limitě mocnin přechodové matice (pokrač.)

### Věta (o limitě mocnin přechodové matice regulárního MŘ)

Mějme regulární MŘ s přechodovou maticí $\boldsymbol{P}$. Potom při $n \to \infty$ konvergují mocniny $\boldsymbol{P}^n$ k nějaké *limitní matici* $\boldsymbol{A}$, která má ve všech řádcích shodný p-stní vektor $\boldsymbol{\alpha}$ se samými kladnými složkami:

$$\boldsymbol{P}^n \to \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \mathbf{1} & \dots & \alpha_s \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \alpha_i > 0,$$

přičemž $\mathbf{1}$ zde představuje sloupcový vektor samých jednotek.

Existuje mnoho různých důkazů (různý použitý aparát); my jen naznačíme jeden relativně elementární.

## Věta o limitě mocnin přechodové matice (pokrač.)

*Náznak důkazu.*

- chceme vlastně ukázat, že sloupce $\boldsymbol{P}^n$ mají časem stejné složky (tj. stávají se *konstantními vektory*)
- první sloupec $\boldsymbol{P}^n$ je roven $\boldsymbol{P}^n\boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{v} = [1 \;\; 0 \;\; \dots \;\; 0]^\top$, podobně pro další sloupce
- stačí tedy ukázat, že $\boldsymbol{P}^n\boldsymbol{v}$ konverguje pro libovolné $\boldsymbol{v}$ ke konstantnímu vektoru
- všimneme si, že $\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}$ průměruje složky $\boldsymbol{v}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 3 \\ 1/4 \cdot 1 + 1/2 \cdot 2 + 1/4 \cdot 3 \\ 1/4 \cdot 1 + 1/4 \cdot 2 + 1/2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 2.75 \end{bmatrix}$$

- složky $\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}$ jsou si blíž než složky $\boldsymbol{v}$, ještě blíž si budou složky $\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{v})$ atd.

## Některé vlastnosti limitní matice

### Pozorování

1. $\boldsymbol{A}\mathbf{1} = \mathbf{1}$.
2. $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}$ pro libovolný pravděpodobnostní vektor $\boldsymbol{\pi}$.
3. $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}$.
4. $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.
5. $(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{A})^n = \boldsymbol{P}^n - \boldsymbol{A}$.

Vysvětlení:

1. Víme totéž o $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{P}^n$, vysvětlení stejné (řádky = p-stní vektory).
2. $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{A}$ je vlastně vážený průměr (stejných) řádků $\boldsymbol{A}$.
3. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, neboť řádky $\boldsymbol{A}$ nalevo jsou p-stní vektory (aplikujeme body 1 a 2).

## Některé vlastnosti limitní matice (pokrač.)

4. První rovnost plyne ihned z bodu 2, druhá je zajímavější:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}^n &\to \boldsymbol{A}, && \text{tedy i} \\ \boldsymbol{P}^{n+1} = \boldsymbol{P}^n\boldsymbol{P} &\to \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}, && \text{ale zřejmě rovněž} \\ \boldsymbol{P}^{n+1} &\to \boldsymbol{A}, && \text{čili nutně} \\ \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}. \end{aligned}$$

5. Použijeme body 3 a 4 a indukci. Pro $n = 1$ tvrzení platí, a platí-li pro $n = k$, máme

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{A})^{k+1} &= (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{A})^k \\ &= (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{P}^k - \boldsymbol{A}) \\ &= \boldsymbol{P}^{k+1} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^k - \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 \\ &= \boldsymbol{P}^{k+1} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}. \end{aligned}$$

# Stacionární vektory

### Stacionární vektor MŘ

Řekneme, že p-stní vektor $\boldsymbol{\alpha}$ je *stacionárním vektorem* MŘ s přechodovou maticí $\boldsymbol{P}$, pokud $\boldsymbol{\alpha P} = \boldsymbol{\alpha}$.

- Někdy hovoříme též o *stacionárním rozdělení* MŘ ($\boldsymbol{\alpha}$ udává p-stní rozdělení na $S$).
- Význam: je-li výchozí rozdělení $\boldsymbol{\alpha}$, už se s ním v následujících krocích nic nestane.

# Věta o stacionárních vektorech

## Věta (o stacionárních vektorech)

Mějme regulární MŘ s přechodovou maticí $\boldsymbol{P}$ a limitní maticí $\boldsymbol{A}$ s řádky $\boldsymbol{\alpha}$. Platí:

1. MŘ má právě jeden stacionární vektor, a sice $\boldsymbol{\alpha}$.
2. při libovolném počátečním rozdělení $\boldsymbol{\pi}$ platí, že
$$\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}^n \to \boldsymbol{\alpha} \qquad \text{při } n \to \infty.$$
3. Platí-li $\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, pak $\boldsymbol{v}$ je nutně konstantní vektor, neboli $\boldsymbol{v}$ je násobkem $\mathbf{1}$.

Suma sumárum: stacionární vektor v regulárním MŘ vždy existuje, je právě jeden, odpovídá řádkům limitní matice a představuje limitní rozdělení při libovolném počátečním stavu.

## Věta o stacionárních vektorech (pokrač.)

*Důkaz.*

1. Již víme, že $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{A}$, tedy $\boldsymbol{\alpha P} = \boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\alpha}$ je stacionární vektor. Ukažme jeho jednoznačnost. Je-li $\boldsymbol{\beta}$ jiný stacionární vektor, potom

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta P} = (\boldsymbol{\beta P})\boldsymbol{P} = \ldots = \boldsymbol{\beta P}^n,$$

   a tedy v limitě i $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta A}$, ale $\boldsymbol{\beta A} = \boldsymbol{\alpha}$ pro libovolný p-stní vektor $\boldsymbol{\beta}$, tj. $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$.

2. $\boldsymbol{P}^n \to \boldsymbol{A}$, tj. $\boldsymbol{\pi P}^n \to \boldsymbol{\pi A}$, ale $\boldsymbol{\pi A} = \boldsymbol{\alpha}$, tj. celkem $\boldsymbol{\pi P}^n \to \boldsymbol{\alpha}$.

3. Máme $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Pv} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Pv}) = \ldots = \boldsymbol{P}^n\boldsymbol{v}$, a v limitě tedy $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Av}$. $\boldsymbol{A}$ má stejné řádky, tj. $\boldsymbol{Av}$ je konstantní vektor.

## Výpočet stacionárího vektoru

Stacionární vektor je jediný vektor, který řeší soustavu

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\alpha},$$
$$\sum \alpha_i = 1.$$

Zkusme si to nejprve ručně a pak v Matlabu na jednoduchých příkladech.

# Příklad: Byt či dům?

- z domácností, které bydlely v bytech, jich 20 % přesídlilo do rodinných domů
- 15% obyvatel rodinných domů se přesunulo do bytů
- pokud by tento trend pokračoval dlouhodobě, jaká část obyvatel bude bydlet v bytech?

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{byt} & \text{dům} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{byt} \\ \text{dům} \end{array} & \begin{bmatrix} .80 & .20 \\ .15 & .85 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Hledáme stacionární vektor, máme tedy soustavu

$$\begin{aligned} .80\,\alpha_1 + .15\,\alpha_2 &= \alpha_1, \\ .20\,\alpha_1 + .85\,\alpha_2 &= \alpha_2, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1. \end{aligned}$$

## Příklad: Byt či dům? (pokrač.)

Proměnné převedeme nalevo:

$$\begin{aligned} -.20\,\alpha_1 + .15\,\alpha_2 &= 0, \\ .20\,\alpha_1 - .15\,\alpha_2 &= 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1. \end{aligned}$$

Jeden z prvních dvou řádků lze zjevně vynechat; máme ihned řešení

$$\alpha_1 = \frac{.15}{.35} = \frac{3}{7},$$

$$\alpha_2 = \frac{.20}{.35} = \frac{4}{7},$$

zlomky odpovídají teoretickému dlouhodobému podílu bytů a domů.

# Příklad: Zločinci

- Stander a kol. (1989) zkoumali specializaci zločinců ve Philadelphii
- konkrétně odhadli přechodovou matici mezi po sobě jdoucími druhy zločinů u jednoho delikventa
- kategorie: nezařazeno, ublížení na zdraví, krádež, poškození cizí věci, kombinace (v matici $\boldsymbol{P}$ v tomto pořadí)

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} .645 & .099 & .152 & .033 & .071 \\ .611 & .138 & .128 & .033 & .090 \\ .514 & .067 & .271 & .030 & .118 \\ .609 & .107 & .178 & .064 & .042 \\ .523 & .093 & .183 & .022 & .179 \end{bmatrix}$$

Vydrží-li tyto aktuální trendy, jaké budou výhledově podíly jednotlivých typů trestných činů?

# Příklad: Zločinci (pokrač.)

Proč to řešit ručně? Soustavu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha P} &= \boldsymbol{\alpha}, \\ \sum \alpha_i &= 1 \end{aligned}$$

zapíšeme jako (transponujeme kvůli standardnímu tvaru soustav)

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{P}^\top - \boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}^\top &= \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{1}\boldsymbol{\alpha}^\top &= 1, \end{aligned}$$

čili

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}^\top - \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^\top = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

## Příklad: Zločinci (pokrač.)

Poslední vyjádření lze snadno zapsat v Matlabu. Máme-li obecně $s$ stavů (v Matlabu proměnná `s`) a v proměnné `P` uloženu přechodovou matici, lze zapsat třeba

```
I = eye(s);                           % Jednotková matice.
T1 = ones(1,s);                       % Tučná 1.
T0 = zeros(s,1);                      % Tučná 0.
alpha = [P' - I; T1] \ [T0; 1];       % Vyřeší soustavu.
alpha = alpha';                       % alpha je řádkové.
```

## Poznámky k výpočtům stacionárních vektorů

1. lze samozřejmě řešit i mocněním $\boldsymbol{P}$ na velké číslo, ale…
   - numericky nestabilní (viz příklad na cvičeních)
   - nelze použít pro periodické řetězce (soustava rovnic ano)
2. při ručním výpočtu můžeme vždycky vynechat jednu rovnici, dokonce kteroukoli kromě té poslední ($\sum \alpha_i = 1$)
   - $\boldsymbol{P}^\top - \boldsymbol{I}$ je totiž singulární
   - součet jejích řádků je totiž nulový vektor (proč?), řádky jsou tedy LZ
   - dokonce kterýkoli řádek lze dostat jako lineární kombinaci ostatních (a na pravých stranách jsou samé 0)

## Střední doba prvního přechodu

**Definice**

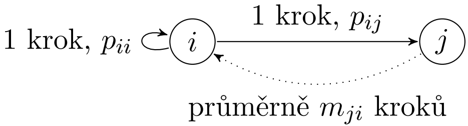
Průměrný počet kroků, po kterých se regulární MŘ z aktuálního stavu $i$ dostane poprvé do stavu $j$, se nazývá *střední doba prvního přechodu* z $i$ do $j$, značíme $m_{ij}$. v případě $i = j$ hovoříme zpravidla o *střední době prvního návratu.*

Nalezení $m_{ij}$ pro $i \neq j$:

- stačí použít trik zabsorpčnění (z $j$ uděláme absorpční stav)
- viz příklad s myším labyrintem
- praktické pouze v případě, že nás zajímá jedna konkrétní dvojice $i, j$

# Střední doba prvního návratu

Buď rovnou setrvám v $i$, nebo půjdu přes jiný stav $j$:




$$
\begin{aligned}
m_{ii} &= p_{ii} \cdot 1 + \sum_{j \neq i} p_{ij}(1 + m_{ji}) \\
&= 1 + \sum_{j \neq i} p_{ij} m_{ji}.
\end{aligned}
$$

Takto by to sice šlo, ale bylo by to velmi zdlouhavé.

## Střední doby prvního přechodu, maticově

Najdeme způsob, jak spočítat celou matici $\boldsymbol{M} = [m_{ij}]$ najednou; využijeme přitom následující značení:

### Značení

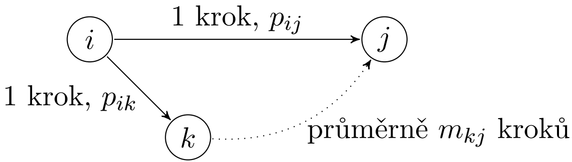
Máme-li čtvercovou matici $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ řádu $s$, pak maticí $\widehat{\boldsymbol{A}}$ budeme rozumět diagonální matici, která vznikne z $\boldsymbol{A}$ nahrazením nediagonálních prvků nulami, neboli

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{ss}).$$

Snadno si rozmyslíme, že

$$\text{prvek } (i, j) \text{ v } \boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{M}} = p_{ij} m_{jj}.$$

## Střední doby prvního přechodu, maticově (pokrač.)




$$
\begin{aligned}
m_{ij} &= p_{ij}\cdot 1 + \sum_{k\neq j} p_{ik}(1+m_{kj}) \\
&= 1 + \sum_{k\neq j} p_{ik} m_{kj} \\
&= 1 + \sum_{k} p_{ik} m_{kj} - p_{ij} m_{jj},
\end{aligned}
$$

maticově tedy $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{1} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{1} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{M} - \widehat{\boldsymbol{M}})$.

## Střední doby prvního návratu, maticově (pokrač.)

### Věta (o středních dobách prvního přechodu a návratu)

Mějme regulární MŘ s přechodovou maticí $\boldsymbol{P}$, stacionárním vektorem $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_i]$ a maticí středních dob prvního přechodu $\boldsymbol{M} = [m_{ij}]$. Platí:

1. $\boldsymbol{M} = \mathbf{1} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{M} - \widehat{\boldsymbol{M}})$.
2. $m_{ii} = 1/\alpha_i$.

*Důkaz.*

1. Už máme.
2. Stačí přenásobit bod 1 zleva stacionárním vektorem:

$$\boldsymbol{\alpha M} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha P}(\boldsymbol{M} - \widehat{\boldsymbol{M}})$$

$$\boldsymbol{\alpha M} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha M} - \boldsymbol{\alpha} \widehat{\boldsymbol{M}}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \widehat{\boldsymbol{M}} = \mathbf{1}, \quad \text{čili} \quad \alpha_i \, m_{ii} = 1.$$

# Fundamentální matice regulárního MŘ

- v absorpčních MŘ byla důležitá fundamentální matice

$$\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 + \dots$$

- pro důkaz jak existence inverze uprostřed, tak druhé rovnosti jsme potřebovali $\boldsymbol{Q}^n \to \mathbf{0}$
- v regulárních MŘ nemáme absopční stavy a $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}$ je singulární (sloupce zjevně LZ, jejich součet je nulový vektor), tudy cesta nevede
- víme ale, že $\boldsymbol{P}^n \to \boldsymbol{A}$ a také $\boldsymbol{P}^n - \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{A})^n$, čili

$$(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{A})^n \to \mathbf{0} \qquad \text{při } n \to \infty$$

- stejnou úvahou jako v absorpčních MŘ tedy zjistíme, že řada

$$\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{A})^2 + \dots$$

konverguje a její součet je $(\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{A}))^{-1}$

# Fundamentální matice regulárního MŘ

## Definice

Fundamentální maticí regulárního MŘ s přechodovou maticí $\boldsymbol{P}$ a limitní maticí $\boldsymbol{A}$ rozumíme matici

$$\boldsymbol{Z} \;=\; (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{A})^{-1} \;=\; \boldsymbol{I}+(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{A})^2+\dots$$

Fundamentální matice má několik vlastností, které budeme využívat:

## Pozorování (vlastnosti fundamentální matice)

1. $\boldsymbol{\alpha Z} = \boldsymbol{\alpha}$.
2. $\boldsymbol{Z1} = \boldsymbol{1}$.
3. $\boldsymbol{ZP} = \boldsymbol{Z}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$.

## Fundamentální matice regulárního MŘ

Všechny vlastnosti se ověřují stejně: přenásobením $\boldsymbol{Z}^{-1}$, tj. maticí $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{A}$, zleva nebo zprava:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{Z} &= \boldsymbol{\alpha},\\ \boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{A})\\ &= \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}\mathbf{1} &= \mathbf{1},\\ \mathbf{1} &= (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{A})\mathbf{1}\\ &= \mathbf{1}-\mathbf{1}+\mathbf{1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{Z}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I},\\ \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{I}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}-\boldsymbol{A}\\ &= \boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2\\ &= \boldsymbol{P}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

## Myší fundamentální matice

$$\boldsymbol{Z} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 58 & 21 & -2 & -15 & -4 & 21 & -2 & -15 & -14 \\ 14 & 57 & 14 & -3 & 4 & -3 & -10 & -15 & -10 \\ -2 & 21 & 58 & 21 & -4 & -15 & -14 & -15 & -2 \\ -10 & -3 & 14 & 57 & 4 & -15 & -10 & -3 & 14 \\ -2 & 3 & -2 & 3 & 44 & 3 & -2 & 3 & -2 \\ 14 & -3 & -10 & -15 & 4 & 57 & 14 & -3 & -10 \\ -2 & -15 & -14 & -15 & -4 & 21 & 58 & 21 & -2 \\ -10 & -15 & -10 & -3 & 4 & -3 & 14 & 57 & 14 \\ -14 & -15 & -2 & 21 & -4 & -15 & -2 & 21 & 58 \end{bmatrix}.$$

Tedy: čísla nejsou nutně mezi 0 a 1, ale přesto má některé podobné vlastnosti jako $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{A}$.

## Myší fundamentální matice (pokrač.)

V Matlabu můžeme vyjádřit (při známém $\boldsymbol{\alpha}$) jako:

```
A = ones(s,1)*alpha; % Příprava matice A.
I = eye(s);          % Jednotková matice.
Z = (I - P + A)^-1   % Vypočte a zobrazí Z.
```

## Výpočet $M$ pomocí fundamentální matice

- rádi bychom vyjádřili z rovnice

$$\boldsymbol{M} = \mathbf{1} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{M} - \widehat{\boldsymbol{M}})$$

matici $\boldsymbol{M}$ v explicitním tvaru
- víme přitom, že $\widehat{\boldsymbol{M}}$ umíme spočítat ze stacionárního vektoru
- můžeme upravit na $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{M} = \mathbf{1} - \boldsymbol{P}\widehat{\boldsymbol{M}}$, ale $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}$ je singulární
- celou rovnici přenásobíme $\boldsymbol{Z}$ a využijeme vlastností $\boldsymbol{Z}$
- kromě toho si rozmyslíme, že

$$\text{prvek } (i, j) \text{ v } \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{M}} = \alpha_j m_{jj} = 1,$$

čili $\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{M}} = \mathbf{1}$

## Výpočet $\boldsymbol{M}$ pomocí fundamentální matice (pokrač.)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M} &= \mathbf{1} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{M} - \widehat{\boldsymbol{M}}) && \mid \boldsymbol{Z}\cdot \text{ (zleva)}\\
\boldsymbol{Z}\boldsymbol{M} &= \boldsymbol{Z}\mathbf{1} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{M} - \widehat{\boldsymbol{M}}) && \mid \text{vlastnosti } \boldsymbol{Z}\\
\boldsymbol{Z}\boldsymbol{M} &= \mathbf{1} + (\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})(\boldsymbol{M} - \widehat{\boldsymbol{M}}) && \mid \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{M}} = \mathbf{1}, -\boldsymbol{Z}\boldsymbol{M}\\
\mathbf{0} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M} - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{M}} + \widehat{\boldsymbol{M}} && \mid +\boldsymbol{M} - \widehat{\boldsymbol{M}}\\
\boldsymbol{M} - \widehat{\boldsymbol{M}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{M}}
\end{aligned}
$$

Označme $j$-tou složku $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{M}$ jako $[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{M}]_j$. Porovnáním stejnolehlých prvků na levé a pravé straně poslední rovnice dostaneme:

$$
\begin{aligned}
m_{ij} &= [\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{M}]_j - z_{ij}m_{jj} && \text{pro } i \neq j,\\
0 &= [\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{M}]_j - z_{jj}m_{jj} && \text{pro diagonální prvky,}
\end{aligned}
$$

dosazením z druhého řádku do prvního máme

$$
m_{ij} = z_{jj}m_{jj} - z_{ij}m_{jj} = (z_{jj} - z_{ij})/\alpha_j \qquad \text{pro } i \neq j.
$$

## Výpočet $\boldsymbol{M}$ pomocí fundamentální matice (pokrač.)

### Pozorování

Střední doby prvního přechodu v regulárním řetězci lze vyjádřit jako

$$m_{ij} = \begin{cases} 1/\alpha_j & \text{pro } i = j, \\ \dfrac{z_{jj} - z_{ij}}{\alpha_j} & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

V maticové podobě můžeme zapsat

$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{I} + \mathbf{1}\widehat{\boldsymbol{Z}} - \boldsymbol{Z})\widehat{\boldsymbol{M}}.$$

Ověření správnosti maticového zápisu nechávám na vás (zkuste opět zvlášť diagonální a nediagonální prvky).

# Výpočet $M$ pomocí fundamentální matice (pokrač.)

V Matlabu můžeme použít třeba následující kód:

```
I = eye(s);                      % Jednotková matice.
Md = diag(1./alpha);             % Diagonální matice z M.
Zd = Z.*I;                       % Diagonální matice ze Z.
M = (I + ones(s)*Zd - Z)*Md; % Vzorec pro výpočet M.
```

# Myš na přechodu

Nejprve spočteme $\widehat{\boldsymbol{M}}$, poté celou $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 15 & 12 & 6 & 6 & 15 & 12 & 18 \\ 11 & 8 & 11 & 10 & 5 & 10 & 17 & 12 & 17 \\ 15 & 6 & 12 & 6 & 6 & 12 & 18 & 12 & 15 \\ 17 & 10 & 11 & 8 & 5 & 12 & 17 & 10 & 11 \\ 15 & 9 & 15 & 9 & 6 & 9 & 15 & 9 & 15 \\ 11 & 10 & 17 & 12 & 5 & 8 & 11 & 10 & 17 \\ 15 & 12 & 18 & 12 & 6 & 6 & 12 & 6 & 15 \\ 17 & 12 & 17 & 10 & 5 & 10 & 11 & 8 & 11 \\ 18 & 12 & 15 & 6 & 6 & 12 & 15 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

Pátý sloupec by nám měl být povědomý.

# Nerozložitelné řetězce

Příklad s nádobami $A$ a $B$ ze cvičení: jisté limitní vlastnosti platí i pro periodické nerozložitelné řetězce.

## Věta (o nerozložitelných řetězcích)

1. Existuje jednoznačně určený p-stní vektor $\boldsymbol{\alpha}$ takový, že $\boldsymbol{\alpha P} = \boldsymbol{\alpha}$; navíc, složky tohoto vektoru jsou ryze kladné.
2. Platí-li $\boldsymbol{Pv} = \boldsymbol{v}$, pak $\boldsymbol{v}$ je konstantní vektor.
3. Zaveďme pro $n \geq 0$ matici $\boldsymbol{A}^{(n)}$ předpisem

$$\boldsymbol{A}^{(n)} = \frac{\boldsymbol{I} + \boldsymbol{P} + \ldots + \boldsymbol{P}^n}{n+1}.$$

   Pak $\boldsymbol{A}^{(n)} \to \boldsymbol{A}$, kde $\boldsymbol{A}$ je matice, jejíž řádky tvoří vektor $\boldsymbol{\alpha}$.
4. Matice $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P} + \boldsymbol{A}$ je regulární, její inverzi říkáme opět *fundamentální matice*.

## Nerozložitelné řetězce (pokrač.)

- na základě fundamentální matice můžeme opět dopočítat střední doby prvního přechodu jako pro regulární řetězce
- všechna odvození, co jsme měli, lze napasovat na periodické řetězce, jenom (a) máme jinak definovanou matici $\boldsymbol{A}$ a (b) existence $\boldsymbol{Z}$ se dokazuje trochu jinak

**Věta: Zákon velkých čísel pro nerozložitelné řetězce**

Mějme nerozložitelný MŘ se stacionárním vektorem $\boldsymbol{\alpha}$. Označme podíl výskytů stavu $i$ v $n$ po sobě jdoucích krocích jako $V_i^{(n)}$. Pak pro libovolný stav $i$ a libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$\Pr\left\{|V_i^{(n)} - \alpha_i| > \varepsilon\right\} \to 0 \qquad \text{při } n \to \infty.$$

# Modely obnovy selhávajících prvků

- jedna z typických aplikací teorie regulárních MŘ
- příklad: režim výměny žárovek na VŠE
- sleduje se věková struktura a počet vyměněných žárovek
- model ale popisuje, co se děje v jedné objímce
- data: vysledované rozdělení pro životnost součástky

$$\Pr\{\text{selže v } i\text{-tém období}\} = a_i, \qquad i = 1, \ldots, s$$

- $S = \{1, \ldots, s\}$
- číslo stavu = kolikáté období bude součástka sloužit (1 = nová součástka, 2 = součástka stará 1 období atd.)

## Přechodová matice

Ze stavu $i$ lze zřejmě přejít jen do 1 (výměna) nebo $i+1$.

$$\begin{aligned} p_{i1} &= \Pr\{\text{selže v } i\text{-tém období} \mid \text{přežila } i-1 \text{ období}\} = \Pr\{A|C\}, \\ p_{i,i+1} &= \Pr\{\text{přežije } i\text{-té období} \mid \text{přežila } i-1 \text{ období}\} \quad = \Pr\{B|C\}. \end{aligned}$$

P-st podmínky $C$:

$$\begin{aligned} \Pr\{C\} &= 1 - \Pr\{\text{selhala během prvních } i-1 \text{ období}\} \\ &= 1 - \left(a_1 + \ldots + a_{i-1}\right) \\ &= a_i + \ldots + a_s. \end{aligned}$$

Zavedeme proto

$$r_i = a_i + \ldots + a_s.$$

## Přechodová matice (pokrač.)

Je zřejmě $A, B \subset C$, tedy $A \cap C = A$ a $B \cap C = B$:

$$p_{i1} = \Pr\{A|C\} = \frac{\Pr\{A \cap C\}}{\Pr\{C\}} = \frac{\Pr\{A\}}{\Pr\{C\}} = \frac{a_i}{r_i},$$

$$p_{i,i+1} = \Pr\{B|C\} = \frac{\Pr\{B \cap C\}}{\Pr\{C\}} = \frac{\Pr\{B\}}{\Pr\{C\}} = \frac{r_{i+1}}{r_i}.$$

# Přechodová matice (pokrač.)

## Pozorování

Přechodová matice pro MŘ v modelech obnovy má tvar

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ s-1 \\ s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} a_1/r_1 & r_2/r_1 & & & & \\ a_2/r_2 & & r_3/r_2 & & & \\ a_3/r_3 & & & r_4/r_3 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ a_{s-1}/r_{s-1} & & & & & r_s/r_{s-1} \\ 1 & & & & & \end{array}\right] \end{array}.$$

# Příklad: Žárovky na VŠE

Aktuálně máme 1000 nových žárovek. P-sti selhání v jednotlivých letech:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | 0.2 | 0.4 | 0.3 | 0.1 |
| $r_i$ | 1.0 | 0.8 | 0.4 | 0.1 |

Přechodová matice:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.80 & 0 & 0 \\ 0.50 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0.75 & 0 & 0 & 0.25 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Příklad: Žárovky na VŠE (pokrač.)

Víme, že p-st stavů pro 1 objímku po $n$ letech je

$$\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}^n,$$

kde $\boldsymbol{\pi}$ je vektor počátečních p-stí, v našem případě jsou aktuálně všechny žárovky nové, tj.

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Věková struktura $n$ letech bude přibližně $1000\,\boldsymbol{\pi}^{(n)}$.

### Pozorování

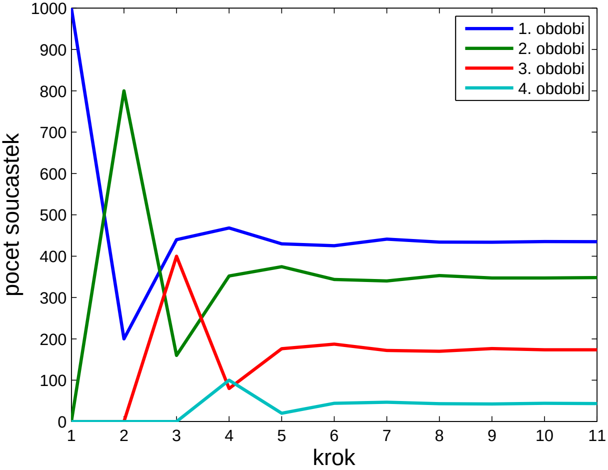
Máme-li v řádkovém vektoru $\boldsymbol{v}^\top$ zachyceny aktuální počty součástek různého stáří, přibližnou věkovou strukturu v dalších krocích získáme postupným násobením maticí $\boldsymbol{P}$ zprava.

## Příklad: Žárovky na VŠE (pokrač.)

Věková struktura v dalších letech, zaokrouhleno na celá čísla:

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| rok 0 | 1000 | 0 | 0 | 0 |
| rok 1 | 200 | 800 | 0 | 0 |
| rok 2 | 440 | 160 | 400 | 0 |
| rok 3 | 468 | 352 | 80 | 100 |
| rok 4 | 430 | 374 | 176 | 20 |
| rok 5 | 425 | 344 | 187 | 44 |
| rok 6 | 441 | 340 | 172 | 47 |
| rok 7 | 434 | 353 | 170 | 43 |
| rok 8 | 434 | 347 | 177 | 43 |
| rok 9 | 435 | 347 | 174 | 44 |
| rok 10 | 435 | 348 | 174 | 43 |
| rok 11 | 435 | 348 | 174 | 43 |

# Příklad: Žárovky na VŠE (pokrač.)

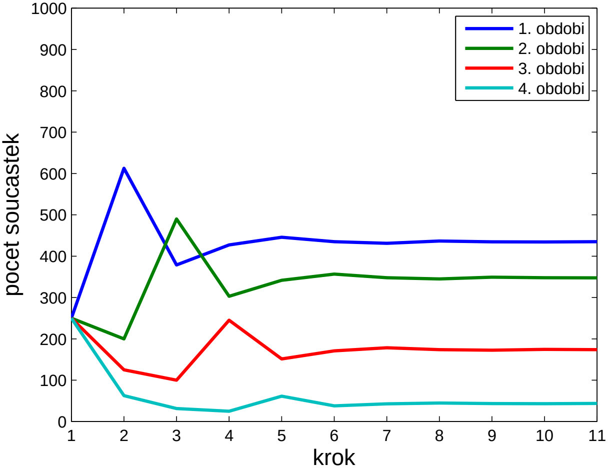


## Příklad: Žárovky na VŠE (pokrač.)

V dlouhém období nezáleží na výchozím stavu, zkusme začít od jiné věkové struktury:

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| rok 0 | 250 | 250 | 250 | 250 |
| rok 1 | 613 | 200 | 125 | 63 |
| rok 2 | 379 | 490 | 100 | 31 |
| rok 3 | 427 | 303 | 245 | 25 |
| rok 4 | 446 | 342 | 152 | 61 |
| rok 5 | 435 | 357 | 171 | 38 |
| rok 6 | 431 | 348 | 178 | 43 |
| rok 7 | 437 | 345 | 174 | 45 |
| rok 8 | 435 | 349 | 172 | 43 |
| rok 9 | 434 | 348 | 175 | 43 |
| rok 10 | 435 | 348 | 174 | 44 |

# Příklad: Žárovky na VŠE (pokrač.)



## Stacionární věková struktura

MŘ pro modely obnovy je zřejmě regulární (díky výměnám), ze soustavy $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha P}$ vynecháme první rovnici a dostaneme (zkuste si!)

$$\alpha_i = \alpha_{i-1}\frac{r_i}{r_{i-1}}, \quad \text{neboli} \quad \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} = \frac{r_i}{r_{i-1}},$$

čili $\alpha_i$ musí být úměrné $r_i$ . Jinak řečeno, $\boldsymbol{\alpha}$ musí být násobkem vektoru $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_s \end{bmatrix}$.

### Pozorování

Stacionární věková struktura v modelu obnovy má podobu

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{s} r_i}\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_s \end{bmatrix}.$$

## (Ne)konvergence ke stacionární věkové struktuře

Co nám může předchozí úvahu pokazit?

- MŘ je zjevně nerozložitelný, má tedy stacionární vektor, resp. existuje stacionární věková struktura
- MŘ by ale mohl být periodický → nekonvergence ke stacionární věkové struktuře
- např. máme-li 4 stavy a $a_1 = a_3 = 0$, vracíme se do stavu 1 vždy po sudém počtu kroků
- jsou-li na začátku součástky nové, mají vždy buď všechny liché nebo všechny sudé stáří

### Pozorování

Konvergence ke stacionární věkové struktuře je zajištěna právě tehdy, když $nsd\{n : a_n > 0\} = 1$, tj. období s nenulovou p-stí selhání nemají společného dělitele.

# MŘ s oceněním přechodů

- v některých příkladech na cvičeních jsme dělali jednoduchou finanční analýzu
- zpravidla byl pobyt v jistém stavu spojen s jistými náklady
- v obecnější formě lze účtovat náklady při konkrétním přechodu
- při přechodu $i \to j$ obdržíme (kladný nebo záporný) výnos $r_{ij}$
- opravdu obecnější: může se lišit pro různá $i$, tj. závisí na tom, odkud jsme do stavu $j$ přišli
- výnosy ze všech možných přechodů zapisujeme souhrnně do *matice ocenění přechodů* $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]$

# Příklad: Za pohodlí se platí

- vraťme se k situaci z příkladu Byt či dům
- za každý krok (řekněme 1 rok) platíme nájem, energie, stočné. . . , v průměru 180 tis. Kč/rok pro byt a 220 pro dům
- při stěhování dodatečné náklady 50 tis. Kč
- otázka: kolik v průměru zaplatí 1 domácnost za 20 let, bydlí-li teď v bytě?
- v terminologii MŘ s oceněním: jaký je celkový očekávaný výnos ze stavu byt po 1, 2 a 20 obdobích?
- značíme $v_{\text{byt}}^{(1)}, v_{\text{byt}}^{(2)}$ a $v_{\text{byt}}^{(20)}$

$$\boldsymbol{R} = \begin{array}{c} \\ \text{byt} \\ \text{dům} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{byt} & \text{dům} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -180 & -250 \\ -250 & -220 \end{bmatrix} \end{array}.$$

# Příklad: Za pohodlí se platí (pokrač.)

Pro očekávané výnosy za 1 a 2 období máme:

$$v_{\text{byt}}^{(1)} = p_{\text{byt},\text{byt}}(-180) + p_{\text{byt},\text{dům}}(-250) = \sum_{j \in S} p_{\text{byt},j}\, r_{\text{byt},j}$$

$$v_{\text{byt}}^{(2)} = \overbrace{p_{\text{byt},\text{byt}}(-180) + p_{\text{byt},\text{dům}}(-250)}^{\text{dostanu v příštím kroku}} + \underbrace{p_{\text{byt},\text{byt}} v_{\text{byt}}^{(1)} + p_{\text{byt},\text{dům}} v_{\text{dům}}^{(1)}}_{\text{dostanu v přespříštím kroku}}$$

$$= \sum_{j \in S} p_{\text{byt},j} r_{\text{byt},j} + \sum_{j \in S} p_{\text{byt},j} v_j^{(1)}$$

# Vektor celkových výnosů

Označme $\boldsymbol{v}^{(n)} = [v_i^{(n)}]_{i \in S}$ *vektor celkových výnosů* po $n$ krocích; předchozí úvahy snadno zobecníme:

## Pozorování

Pro libovolný stav $i$ a kladný počet kroků platí

$$v_i^{(n)} = \sum_{j \in S} p_{ij} r_{ij} + \sum_{j \in S} p_{ij} v_j^{(n-1)}.$$

Zavedeme-li *přímý výnos* stavu $i$ jako $q_i = \sum_{j \in S} p_{ij} r_{ij}$ a označíme-li *vektor přímých výnosů* $\boldsymbol{q} = [q_i]_{i \in S}$, můžeme psát

$$\boldsymbol{v}^{(n)} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}^{(n-1)}.$$

# Vektor jednorázových výnosů

- dosazením $n = 1$ v předchozím vztahu dostaneme napravo $\boldsymbol{v}^{(0)}$
- tento vektor se někdy označuje jako *vektor jednorázových výnosů*
- $v_i(0)$ vyjadřuje, jaký užitek (výnos) přisuzujeme tomu, že proces v posledním sledovaném kroku skončí ve stavu $i$
- my budeme vesměs pracovat s $\boldsymbol{v}^{(0)} = \mathbf{0}$, tj. na koncovém stavu nezáleží
- na výpočtech to ale vlastně nic nemění

# Příklad: Za pohodlí se platí

- očekávaný výnos za 20 období se v Matlabu snadno spočte
- následující kód předpokládá, že máme uloženu přechodovou matici v `P`, matici ocenění v `R` a počet stavů `s`

```
q = sum(P.*R,2); % Spočte vektor q.
v = zeros(s,1);  % Nulový jednorázový výnos.
for i = 1:20
    v = q + P*v; % Přepis rekurzivního vztahu.
end
```

## Příklad: Za pohodlí se platí (pokrač.)

Celkové výnosy po $n$ obdobích (tis. Kč, zaokrouhleno na celá čísla):

| $n$ | byt | dům |
|---|---|---|
| 1 | $-194$ | $-225$ |
| 2 | $-394$ | $-444$ |
| 3 | $-598$ | $-661$ |
| 4 | $-805$ | $-876$ |
| 5 | $-1\,013$ | $-1\,090$ |
| 6 | $-1\,223$ | $-1\,303$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 20 | $-4\,179$ | $-4\,266$ |

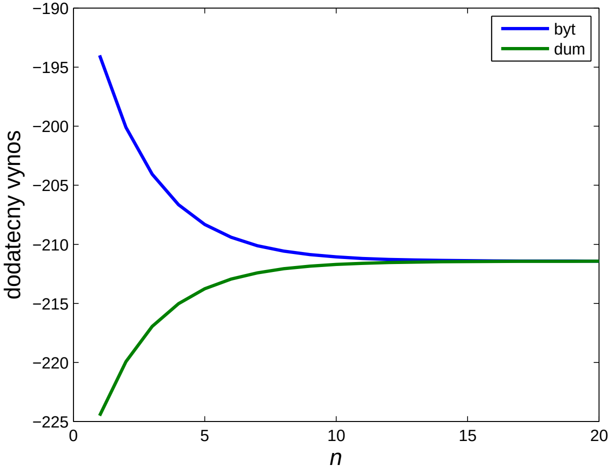
Všimněte si, že rozdíly mezi výchozími stavy se ustalují.

## Příklad: Za pohodlí se platí (pokrač.)

Zajímavější je tabulka dodatečných výnosů za $n$-té období:

| $n$ | byt | dům |
|---|---|---|
| 1 | $-194.00$ | $-224.50$ |
| 2 | $-200.10$ | $-219.92$ |
| 3 | $-204.06$ | $-216.95$ |
| 4 | $-206.64$ | $-215.02$ |
| 5 | $-208.32$ | $-213.76$ |
| 6 | $-209.41$ | $-212.95$ |
| 7 | $-210.11$ | $-212.41$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 18 | $-211.42$ | $-211.44$ |
| 19 | $-211.42$ | $-211.43$ |
| 20 | $-211.42$ | $-211.43$ |

# Příklad: Za pohodlí se platí (pokrač.)



## Asymptotické vlastnosti

- lze zkoumat, máme-li *regulární* MŘ s oceněním
- v dlouhém období nezáleží na výchozím stavu, p-sti udává stacionární vektor $\boldsymbol{\alpha}$
- dodatečný výnos z 1 kroku je tedy $\boldsymbol{\alpha q}$
- výnos po $n$ krocích je tedy (velmi) zhruba $n\boldsymbol{\alpha q}$ pro libovolný výchozí stav; zkusíme to přesněji
- v následujícím předpokládáme, že $\boldsymbol{v}^{(0)} = \mathbf{0}$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}^{(n)} &= \boldsymbol{q} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}^{(n-1)} \\
&= \boldsymbol{q} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{P}^2\boldsymbol{v}^{(n-2)} \\
&= (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{P} + \ldots + \boldsymbol{P}^{n-1})\boldsymbol{q}.
\end{aligned}
$$

## Asymptotické vlastnosti (pokrač.)

Odečtením $n\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}$ od obou stran rovnice upravíme na

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}^{(n)} - n\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} &= (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{P} + \ldots + \boldsymbol{P}^{n-1})\boldsymbol{q} - n\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} \\ &= [\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{A}) + \ldots + (\boldsymbol{P}^{n-1} - \boldsymbol{A})]\boldsymbol{q} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{q} \\ &= [\underbrace{\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{A}) + \ldots + (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{A})^{n-1}}_{\text{s rostoucím } n \text{ uhání k fundamentální matici } \boldsymbol{Z}}]\boldsymbol{q} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}.\end{aligned}$$

### Pozorování

Máme-li regulární MŘ s oceněním, pak při $n \to \infty$ platí vztah

$$\boldsymbol{v}^{(n)} - n\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} \quad \to \quad (\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{q},$$

neboli vektor výnosů po $n$ krocích lze (pro velká $n$) přibližně vyjádřit jako

$$\boldsymbol{v}^{(n)} \simeq \boldsymbol{Z}\boldsymbol{q} + (n-1)\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}.$$

## Markovský rozhodovací proces s oceněním

Někdy můžeme chod náhodného procesu ovlivnit, viz příklad výrobní linky s poruchovými agregáty (všimněte si značení!):

| stav ($i$) | alt. ($k$) | $p_{i1}^k$ | $p_{i2}^k$ | $r_{i1}^k$ | $r_{i2}^k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1: v provozu | bez kontrol | 0.4 | 0.6 | 16 | 4 |
| | namátkové k. | 0.7 | 0.3 | 11 | 2 |
| | pravidelné k. | 0.9 | 0.1 | 8 | 1 |
| 2: v opravě | bez výměny | 0.5 | 0.5 | 4 | $-6$ |
| | s výměnou | 0.6 | 0.4 | 2 | $-10$ |

Cíl: najít optimální volbu alternativ v jednotlivých krocích pro proces sledovaný $n$ kroků

## Markovský rozhodovací proces s oceněním (pokrač.)

- alternativy zvolené v konkrétním stavu se mohou v jednotlivých krocích lišit, tj. hledáme vlastně vektory alternativ $\boldsymbol{d}^{(n)}$
- $d_i^{(n)}$ nám říká, kterou alternativu máme volit, zbývá-li $n$ kroků do konce
- například:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}^{(1)} &= (\,\text{bez kontrol, bez výměny}\,)\\
\boldsymbol{d}^{(2)} &= (\,\text{pravidelné kontroly, bez výměny}\,)\\
\boldsymbol{d}^{(3)} &= (\,\text{pravidelné kontroly, bez výměny}\,)\\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

- v posledním kroku se tedy nevyplatí dělat kontroly, jinak ano
- výměna agregátu se nevyplatí nikdy

## Markovský rozhodovací proces s oceněním (pokrač.)

- případ $n = 1$: snadné, stačí volit alternativy tak, aby byl maximalizován *přímý výnos* z uvažovaného stavu:

$$v_i^{(1)} = \max_k \left\{ \sum_{j \in S} p_{ij}^k r_{ij}^k \right\} = \max_k \left\{ q_i^k \right\}$$

- $d_i^{(1)}$ je potom název (zpr. číslo) alternativy, pro kterou byl výnos maximální, čili

$$d_i^{(1)} = \arg\max_k \left\{ q_i^k \right\}$$

- pro $n > 1$ můžeme rekurzivně dopočítat

$$v_i^{(n)} = \max_k \left\{ q_i^k + \sum_{j \in S} p_{ij}^k v_j^{(n-1)} \right\}$$

- tomuto postupu (optimalizace od konce) se říká *dynamické programování*, příp. zpětná indukce aj.

## Obsah

# MŘ s diskrétním časem a spočetně mnoha stavy

Co platí úplně stejně (příklady):

- Kolmogorovovy-Chapmanovy nerovnosti
- $p_{ij}^{(n)}$ = prvek na pozici $(i, j)$ v $\boldsymbol{P}^n$ (povolíme-li násobení matic spočetného řádu)
- jednoznačný rozklad množiny stavů $S = Tr \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots$
- rekurence a tranzience je třídová vlastnost

Co je jinak?

- nerozložitelný řetězec nemusí mít stacionární rozdělení
- v první řadě může mít dokonce samé tranzientní stavy
- i pro některé rekurentní stavy může být $m_{ii} = \infty$
- ...

# Vlastnosti rekurentních a tranzientních stavů

| | rekurentní | tranzientní |
|---|---|---|
| $\Pr\{X_n = i \text{ pro nějaké } n \geq 1 \mid X_0 = i\}$ | $= 1$ | $< 1$ |
| $\Pr\{i \text{ se navštíví } \infty\text{-krát} \mid X_0 = i\}$ | $= 1$ | $= 0$ |
| $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ | $= \infty$ | $< \infty$ |
| $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ pro $j$ dosažitelné z $i$ | $= \infty$ | $< \infty$ |
| $m_{ii}$ | $\leq \infty$ | $= \infty$ |

První tři vlastnosti lze použít jako alternativní definice rekurence a tranzience.

# Nulová a pozitivní rekurence

## Definice

Řekneme, že rekurentní stav $i$ je

1. *pozitivně rekurentní*, je-li $m_{ii} < \infty$,
2. *nulově rekurentní*, je-li $m_{ii} = \infty$.

Poznámky:

- v MŘ s *konečným* počtem stavů neexistují nulově rekurentní stavy (každý rekurentní stav je automaticky pozitivně rekurentní)
- nulová a pozitivní rekurence jsou třídní vlastnosti (tj. $i$ a $j$ komunikují $\Rightarrow$ jsou stejného typu)
- namísto o vlastnostech při spočetných/konečných množinách stavů se můžeme bavit o vlastnostech spočetných/konečných tříd (viz dále)

## Komunikační třídy, spočetnost a rekurence

- připomeňme, že uzavřená třída je taková, ze které „nevedou šipky“
- *maximální* třídou zase rozumíme takovou, která nelze rozšířit o další stavy (tj. nekomunikuje s dalšími stavy řetězce)
- možné druhy stavů v různých typech maximálních tříd:

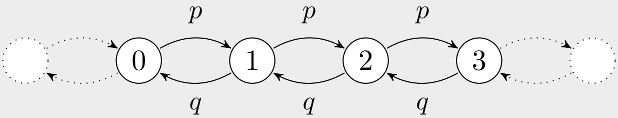
| maximální třída | konečná | nekonečná |
|---|---|---|
| uzavřená | pozitivně rekurentní | pozitivně rekurentní<br>nulově rekurentní<br>tranzientní |
| neuzavřená | tranzientní | tranzientní |

# Procházka po $\mathbb{Z}$

- uvažujme MŘ s množinou stavů $S = \mathbb{Z}$ (celá čísla)
- v každém kroku se proces náhodně přesune k číslu o 1 většímu (s p-stí $p$) nebo menšímu (s p-stí $q = 1 - p$)
- máme tedy

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{pro } j = i + 1 \\ q = 1 - p & \text{pro } j = i - 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

## Přechodový graf



## Procházka po $\mathbb{Z}$ (pokrač.)

Stavy jsou zřejmě 2-periodické, pro libovolný stav $i$ a přirozené $n$ máme

$$p_{ii}^{(2n-1)} = 0,$$

$$p_{ii}^{(2n)} = \overbrace{\binom{2n}{n}}^{\text{počet cest}} \cdot \overbrace{p^n q^n}^{\text{p-st cesty}} = \frac{(2n)!}{n!n!}(pq)^n.$$

Za použití Stirlingova vzorce pro aproximaci faktoriálu, tj.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

dostaneme, že

## Procházka po $\mathbb{Z}$ (pokrač.)

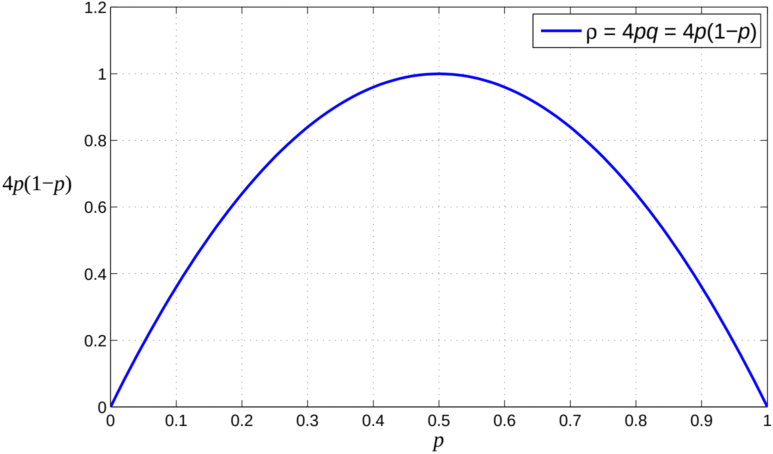
$$
\begin{aligned}
p_{ii}^{(2n)} &= \frac{(2n)!}{n!n!}(pq)^n \\
&\sim \frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}e^{-2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}\right)^2}(pq)^n \\
&= \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.
\end{aligned}
$$

Zajímá nás $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$, což je totéž, jako

$$
\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(2n)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \frac{1}{\sqrt{\pi n}},
$$

kde $\rho = 4pq$. Součet je konečný, je-li $|\rho| < 1$.

# Procházka po $\mathbb{Z}$ (pokrač.)



## Procházka po $\mathbb{Z}$ (pokrač.)

### Pozorování

MŘ modelující náhodnou procházku po $\mathbb{Z}$ je rekurentní, je-li $p = 1/2$; jinak je tranzientní.

Poznámky:

- o nerozložitelném řetězci říkáme, že je tranzientní/rekurentní, pokud jsou takové všechny jeho stavy (víme, že musí být všechny stejného typu)
- i při $p = 1/2$ je $m_{ii} = \infty$ pro libovolný stav $i$, tj. stavy jsou *nulově* rekurentní
- při $p > 1/2$ je MŘ tranzientní, neboť procházka „zanáší doprava“

## Stacionární rozdělení při spočetných stavech

- při konečně mnoha stavech platilo: MŘ nerozložitelný $\Rightarrow$ stavy pozitivně rekurentní, existuje jednoznačné stacionární rozdělení, navíc $0 < \alpha_i = 1/m_{ii}$.
- podotkněme, že i při nekonečně mnoha stavech může existovat ryze kladné rozdělení p-stí
- ukazuje se, že to, co je pro existenci stacionárního rozdělení podstatné, je právě pozitivní rekurence (nikoli konečnost)

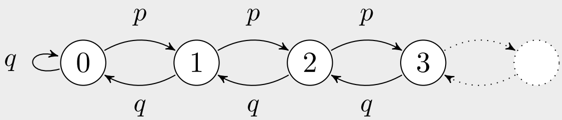
### Věta (o stacionárním rozdělení v MŘ s diskrétním časem)

Nerozložitelný MŘ má stacionární rozdělení právě tehdy, když jsou jeho stavy pozitivně rekurentní. Navíc je v takovém případě stacionární rozdělení $\boldsymbol{\alpha}$ dáno jednoznačně a platí

$$0 < \alpha_i = 1/m_{ii}.$$

# Náhodná procházka po $\mathbb{Z}_+$

## Přechodový graf




$$
\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{array} \\
\begin{bmatrix}
q & p & & & & \\
q & & p & & & \\
& q & & p & & \\
& & q & & p & \\
& & & \ddots & & \ddots
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

## Náhodná procházka po $\mathbb{Z}_+$ (pokrač.)

Zkusme najít stacionární rozdělení. z podmínky $\boldsymbol{\alpha P} = \boldsymbol{\alpha}$ máme:

$$\begin{aligned} q\alpha_0 + q\alpha_1 &= \alpha_0\,, \\ p\alpha_0 + q\alpha_2 &= \alpha_1\,, \\ &\dots \\ p\alpha_{i-1} + q\alpha_{i+1} &= \alpha_i\,, \\ &\dots \end{aligned}$$

Po drobné úpravě můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned} q\alpha_1 - p\alpha_0 &= 0 \\ q\alpha_{i+1} - p\alpha_i &= q\alpha_i - p\alpha_{i-1} \qquad \text{pro } i \geq 1. \end{aligned}$$

Označíme-li $x_i = q\alpha_{i+1} - p\alpha_i$, máme

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_i &= x_{i-1} \qquad \text{pro } i \geq 1. \end{aligned}$$

## Náhodná procházka po $\mathbb{Z}_+$ (pokrač.)

Máme tedy $x_i = 0$ pro $i \geq 0$, neboli

$$\alpha_i = (p/q)\alpha_{i-1} = (p/q)^i \alpha_0 = \rho^i \alpha_0, \qquad \text{kde } \rho = p/q.$$

Z podmínky $\sum_i \alpha_i = 1$ dostáváme

$$\sum_{i \in S} \alpha_i = \alpha_0 \sum_{i \in S} \rho^i = 1.$$

V případě, že $\rho < 1$, je tedy $\alpha_0 = 1 - \rho$, resp. celkem

$$\alpha_i = \rho^i (1 - \rho) \qquad \text{pro } i \geq 0.$$

Existuje tedy stacionární rozdělení a řetězec je pozitivně rekurentní.

Je-li $\rho \geq 1$, stacionární rozdělení neexistuje, a stavy tudíž nejsou pozitivně rekurentní.

# Limity přechodových p-stí

**Věta (o limitě přechodových p-stí)**

Pro nerozložitelný a aperiodický řetězec platí, že

$$p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{m_{jj}} \quad \text{při } n \to \infty \quad \text{pro libovolné stavy } i, j.$$

Poznámky:

- v tranzientních a rekurentních nulových řetězcích je limita rovna nule (pro tranzientní to je zcela intuitivní)
- pro rekurentní pozitivní a aperiodické MŘ věta přináší tvrzení o konvergenci ke stacionárnímu rozdělení, nehledě na rozdělení výchozí (srovnej opět s výsledky pro konečné stavy)

## Obsah

# Úvod do MŘ se spojitým časem

- věci kolem nás se zpravidla nedějí jen v diskrétních časových okamžicích
- zpravidla: diskrétní čas = zjednodušení reality
- analýza modelů se spojitým časem náročnější, k některým hezkým výsledkům lze ale dospět
- MŘ s diskrétním časem šly vyčerpávajícím způsobem popsat pomocí přechodové matice $\boldsymbol{P}$
- $\boldsymbol{P}$ obsahovala p-sti přechodů za nejkratší možný časový úsek (1 krok), ostatní přechodové p-sti se snadno spočetly mocněním $\boldsymbol{P}$
- v MŘ se spojitým časem na to musíme jinak
- místo přechodové matice budeme mít *přechodovou funkci* $\boldsymbol{P}(t)$

# Přechodová funkce

V celé diskuzi o MŘ se spojitým časem budeme uvažovat MŘ o $s$ stavech ($s$ může být případně i $\infty$) a s množinou časů $T = \mathbb{R}_+$.

## Definice

*Přechodovou funkcí* MŘ rozumíme funkci, která libovolnému času $t \in T$ přiřadí matici $\boldsymbol{P}(t)$ typu $s \times s$, v níž se na pozici $(i, j)$ nachází podmíněná p-st přechodu z $i$ do $j$ po čase $t$. Vyžadujeme přitom, aby $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$, neboli za nulový čas nelze změnit stav řetězce.

# Příklad: Džbán

- „Tak dlouho se chodí se džbánem pro vodu, až se ucho utrhne.“
- víme navíc, že doba, za kterou dojde k utržení ucha, má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda$
- stavy: 1 = „má ucho“, 2 = „nemá ucho“
- $p_{12}(t) = \Pr\{\text{ucho se utrhne během doby } t\}$ = hodnota distribuční funkce rozdělení $\mathsf{Ex}(\lambda)$ v bodě $t$, čili

$$\boldsymbol{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda t} & 1 - e^{-\lambda t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- zřejmě zde platí $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$

## Matice intenzit

- explicitně zapsat podobu přechodové funkce lze jen v nezajímavých (= příliš jednoduchých) příkladech
- není ale vše ztraceno, můžeme použít analogii k $\boldsymbol{P}^1$
- tentokrát to bude matice derivací přechodových p-stí v čase 0 (dá se ukázat, že tyto derivace existují)

### Definice

*Maticí intenzit* (též *q-maticí* nebo *generátorem*) rozumíme matici $\boldsymbol{Q} = [q_{ij}]_{i,j\in S}$ danou předpisem

$$q_{ij} = p'_{ij}(0_+) = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0_+} \dfrac{p_{ij}(t)}{t} & \text{pro } i \neq j, \\ \lim\limits_{t\to 0_+} \dfrac{p_{ii}(t) - 1}{t} & \text{jinak.} \end{cases}$$

# Příklad: Intenzivní džbán

Derivace přechodových p-stí v čase $t$ mají tvar

$$\begin{aligned} p'_{11}(t) &= -\lambda e^{-\lambda t}, & p'_{12}(t) &= \lambda e^{-\lambda t}, \\ p'_{21}(t) &= 0, & p'_{22}(t) &= 0, \end{aligned}$$

po dosazení $t = 0$ dostaneme následující matici intenzit:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

# Příklad: Poissonův proces

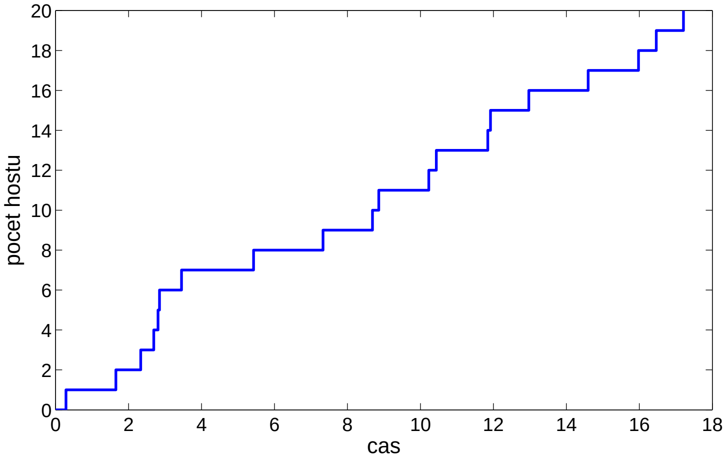
- od začátku otevírací doby přichází do hospody v průměru $\lambda$ hostů za hodinu
- jejich konkrétní počet má Poissonovo rozdělení $\mathsf{Po}(\lambda)$
- v dohledné době nikdo neodchází
- připomeňme, že p-stní funkce pro náhodnou veličinu $X \sim \mathsf{Po}(\lambda)$ má tvar

$$\Pr\{X = k\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}.$$

- pokud počet příchodů $\sim \mathsf{Po}(\lambda)$, pak délka intervalu mezi dvěma po sobě jdoucími hosty $\sim \mathsf{Ex}(\lambda)$

## Příklad: Poissonův proces (pokrač.)

Vývoj počtu hostů může vypadat třeba takto:



## Příklad: Poissonův proces (pokrač.)

Stavy $S = \{0, 1, \dots\}$ = počet hostů, najdeme matici intenzit:

$$\begin{aligned} p_{ii}(t) &= \Pr\{X = 0\} = e^{-\lambda t} & p'_{ii}(t) &= -\lambda e^{-\lambda t} \\ p_{i,i+1}(t) &= \Pr\{X = 1\} = e^{-\lambda t}\lambda t & p'_{i,i+1}(t) &= e^{-\lambda t}(\lambda - \lambda^2 t) \\ p_{i,i+2}(t) &= \Pr\{X = 2\} = \tfrac{1}{2}e^{-\lambda t}(\lambda t)^2 & p'_{i,i+2}(t) &= \tfrac{1}{2}e^{-\lambda t}(2\lambda^2 t - \lambda^3 t^2) \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

Po dosazení $t = 0$ do derivací napravo dostaneme následující výsledek:

$$q_{ij} = \begin{cases} -\lambda & \text{pro } j = i, \\ \lambda & \text{pro } j = i + 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

## Příklad: Poissonův proces (pokrač.)

Matice intenzit má tedy tvar

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ & -\lambda & \lambda & & \\ & & -\lambda & \lambda & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

## Příklad: Poissonův proces (pokrač.)

Zadání by šlo formulovat i jinak: režim příchodů je takový, že . . .

1. počty příchozích v nepřekrývajících se časových intervalech jsou na sobě nezávislé
2. rozdělení počtu příchozích záleží pouze na délce intervalu (je *stacionární*)
3. přichází se po jednom (nemůže nastat více příchodů v jeden časový okamžik)

Lze ukázat, že odtud nutně plyne, že . . .

- intervaly mezi příchody mají exponenciální rozdělení
- počet příchozích za časový interval má nutně Poissonovo rozdělení
- náhodný proces představující počet příchozích v čase má markovskou vlastnost (srovnej s bodem 1)

## Několik poznámek k dalšímu výkladu

- matice intenzit charakterizuje MŘ se spojitým časem podobným způsobem, jako přechodová matice MŘ s diskrétním časem
- lze nicméně narazit na „zvrácené“ případy MŘ se spojitým časem, které nejsou popsány maticí intenzit vyčerpávajícím způsobem (explozivní procesy apod.)
- to je obecným rysem analýzy MŘ se spojitým časem: řada tvrzení platí jen za nepřehledných, technických podmínek, které ale budou pro všechny řetězce, se kterými se v tomto kurzu setkáme, bezpečně splněny
- budu proto předkládat všechna uvedená tvrzení bez zmíněných předpokladů, jako by se nechumelilo
- rovněž nebudeme uvádět příslušná odvození (mělo-li by se to udělat pořádně, bylo by to na dlouho)

# Vlastnosti matice intenzit

## Věta (o vlastnostech matice intenzit)

1. Řádkové součty matice intenzit jsou nulové, tj. $\boldsymbol{Q}\mathbf{1} = \mathbf{0}$.
2. $\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t)$, což značí, že

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) q_{kj} = \sum_{k \in S} q_{ik} p_{kj}(t).$$

3. $\boldsymbol{P}(t) = \exp(t\boldsymbol{Q}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\boldsymbol{Q})^k}{k!}$. (*Pozn*: exp zde představuje *maticovou exponencielu.*)
4. Doba strávená ve stavu $i$ před jeho (prvním, nejbližším) opuštěním má exponenciální rozdělení s parametrem $-q_{ii}$.
5. P-st, že z aktuálního stavu $i$ přejdeme nejprve do stavu $j$ ($\neq i$), je $-q_{ij}/q_{ii}$.

## Klasifikace stavů

- patrně jediná věc, která je pro spojitý čas jednodušší než pro diskrétní
- zjevně zde odpadá periodicita (proč?)
- zjednodušila se otázka dosažitelnosti – buď lze hned, nebo nikdy:

**Pozorování**

Buď je $p_{ij}(t) = 0$ pro všechna $t > 0$, nebo $p_{ij}(t) > 0$ pro všechna $t > 0$.

- dále se budeme zabývat výhradně *nerozložitelnými řetězci*, ve kterých jsou všechny stavy navzájem dosažitelné
- pojmy tranzience a pozitivní/nulové rekurence nebudeme formálně zavádět; intuitivní smysl bude stejný, definice by ale byly trochu komplikovanější

## Stacionární rozdělení v nerozložitelných řetězcích

V MŘ s diskrétním časem jsme zavedli stacionární rozdělení jako p-stní vektor $\boldsymbol{\alpha}$ splňující $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha P}$. Teď ale nemáme přechodovou matici, nýbrž funkci:

### Definice

Řekneme, že p-stní vektor $\boldsymbol{\alpha}$ je *stacionární rozdělení* pro spojitý MŘ, je-li $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha P}(t)$ pro všechna $t \geq 0$.

Naštestí se dá situace převést opět na řešení soustavy rovnic:

### Věta (o stacionárním rozdělení a matici intenzit)

Platí: $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha P}(t)$ pro všechna $t \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\alpha Q} = \mathbf{0}$.

Interpretace: $\boldsymbol{Q}$ zachycuje „přírůstky p-stí“, ty musejí být při stacionárním vektoru v součtu nulové.

## Stacionární rozdělení v nerozložitelných řetězcích (pokrač.)

- máme tedy návod, jak najít stacionární rozdělení (příp. zjistit, že neexistuje)
- aby stacionární rozdělení k něčemu bylo, potřebujeme ještě výsledek o konvergenci

**Věta (o konvergenci k $\boldsymbol{\alpha}$ v MŘ se spojitým časem)**

V nerozložitelném MŘ se spojitým časem platí:

1. Existuje-li stacionární rozdělení $\boldsymbol{\alpha}$, pak je dáno jednoznačně a
$$p_{ij}(t) \to \alpha_j \qquad \text{při } t \to \infty, \qquad \text{pro všechna } i, j.$$
2. Neexistuje-li stacionární rozdělení, pak
$$p_{ij}(t) \to 0 \qquad \text{při } t \to \infty, \qquad \text{pro všechna } i, j.$$

# Příklad: Telefonní linka

Zadání:

- počet příchozích hovorů za hodinu $\sim \mathsf{Po}(\lambda)$
- délka 1 hovoru $\sim \mathsf{Ex}(\mu)$
- při obsazené lince nový volající ihned zavěsí
- jaké procento lidí se nedovolá?

Řešení:

- $S = \{\text{volno}, \text{obsazeno}\} = \{0, 1\}$
- najdeme stacionární p-sti pro oba stavy
- odpověď $= \alpha_1$

## Příklad: Telefonní linka (pokrač.)

Stejné úvahy jako u džbánu a Poissonova procesu dávají:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} \end{array}.$$

Hledáme stacionární vektor $\boldsymbol{\alpha}$, tj řešíme $\boldsymbol{\alpha Q} = \mathbf{0}$, $\sum \alpha_i = 1$:

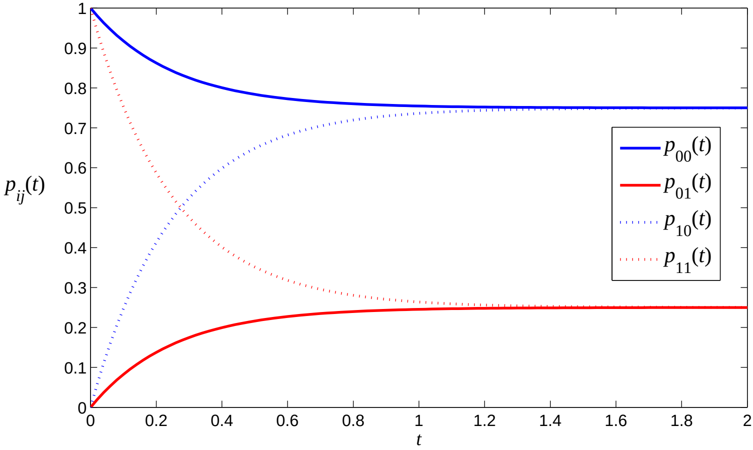
$$\begin{aligned} -\lambda\alpha_0 + \mu\alpha_1 &= 0, \\ \lambda\alpha_0 - \mu\alpha_1 &= 0, \\ \alpha_0 + \alpha_1 &= 1. \end{aligned}$$

Řešení je:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \mu/(\lambda + \mu), \\ \alpha_1 &= \lambda/(\lambda + \mu). \end{aligned}$$

# Příklad: Telefonní linka (pokrač.)

Vývoj přechodových p-stí pro $\lambda = 1, \mu = 3$:



## Simulace v Matlabu

- odpověď v předchozím příkladě bychom mohli hledat i pomocí počítačové simulace
- to se hodí hlavně u složitějších úloh, kde se analytické řešení hledá špatně
- je k tomu potřeba generovat náhodné hodnoty z exponenciálního rozdělení
- Matlab (a jiné SW) umí generovat náhodná čísla z rovnoměrného rozdělení mezi 0 a 1, tj. z $U(0,1)$
- v Matlabu je to příkaz `rand`
- platí: $R \sim U(0,1) \quad \Rightarrow \quad -\log(R)/\lambda \sim \mathsf{Ex}(\lambda)$.

## Simulace v Matlabu (pokrač.)

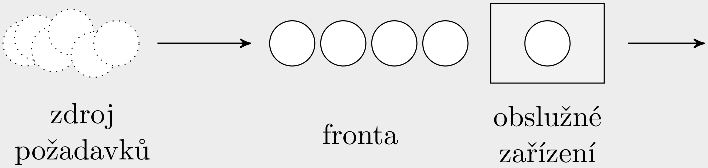
```
lambda = 1;           % Intenzita příchodů hovorů.
mu = 3;               % Intenzita odbavení hovorů.
hovory = 1000;        % Počet hovorů (volíme).
volani = 0;           % Počet volání (zjistíme, zatím 0).
t_prichod = 0;        % Čas nejbližšího příchodu.
t = 0;                % Aktuální simulační čas.

for i = 1:hovory
    t = t - log(rand)/mu;     % Čas ukončení telefonátu.
    while t_prichod <= t      % Je-li linka obsazena,
        volani = volani + 1;  % volající zavěsí.
        t_prichod = t_prichod - log(rand)/lambda;
    end
    t = t_prichod;   % Čas začátku nového telefonátu.
end
podil_zavesenych = (volani - hovory)/volani
```

# Modely hromadné obsluhy

- = MHO = teorie front (*queuing theory*)
- zkoumá průchodnost požadavků (zákazníci, výrobky, objednávky, hovory) systémem

## Jednoduchý model hromadné obsluhy



# Kendallova klasifikace MHO

$$A/S/c/K/N/D,$$

kde

$$\begin{aligned}
A &= \text{proces, kterým se řídí příchody (\textit{arrivals}), např. M – Poissonův proces, D – deterministické intervaly} \\
S &= \text{rozdělení doby obsluhy (\textit{service time})} \\
c &= \text{počet obslužných zařízení} \\
K &= \text{kapacita fronty, např. k pumpě se vejde max. 10 aut} \\
N &= \text{velikost populace požadavků, např. spravujeme 10 (poruchových) firemních vozů } (N = 10) \\
D &= \text{režim fronty, např. FIFO, LIFO, SIRO (\textit{select in random order}), PRI (fronta s prioritami – např. ambulance)}
\end{aligned}$$

# Kendallova klasifikace MHO (pokrač.)

- poslední tři symboly jsou nejčastěji $\infty/\infty$/FIFO
- takovém případě se zpravidla vynechávají
- příklady:

M/M/1 – jednoduchý exponenciální MHO, 1 pokladna (nechceme-li a priori omezit délku fronty, volíme $K = \infty$)

M/M/$c$ – paralelní obslužné linky, pokladny na hlavní poště v Praze („lístečkový systém“ s jednou společnou frontou)

M/M/1/0/$\infty$ – příklad s telefonní linkou

## Jaké charakteristiky MHO nás budou zajímat?

- stacionární p-sti, tj. p-stní rozdělení počtu požadavků přítomných v systému po delší době
- p-stní rozdělení pro dobu strávenou v systému jedním požadavkem
- z toho vyplývající průměrné charakteristiky:

$$
\begin{aligned}
L &= \text{průměrný počet požadavků v systému } (\textit{long-term average}) \\
L_q &= \text{průměrný počet požadavků ve frontě} \\
L_s &= \text{průměrný počet obsluhovaných požadavků} \\
W &= \text{průměrná doba strávená v systému } (\textit{waiting time}) \\
W_q &= \text{průměrná doba strávená ve frontě} \\
W_s &= \text{průměrná doba obsluhy}
\end{aligned}
$$

# Littleův zákon

## Věta (Littleův zákon)

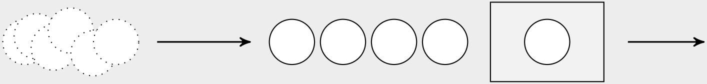
Uvažujme MHO, který je *stabilní*, tj. $W$ i $L$ jsou konečné, a do kterého přicházejí požadavky s (konstantní) průměrnou intenzitou $\lambda$ jednotek za hodinu. Pak platí $L = \lambda W$, neboli

$$\text{prům. doba v systému (hod.)} = \frac{\text{prům. počet v systému}}{\text{prům. počet příchodů za hod.}}.$$

- jde o jednoduché tvrzení o vztahu průměrných ukazatelů $L$ a $W$
- obdivuhodné ale je, že platí univerzálně při různých režimech příchodu požadavků, fronty i obsluhy (tj. nemá skoro žádné předpoklady)
- dá se použít i na podsystémy MHO – např. na všechny přepážky najednou, na jednu konkrétní z nich, na frontu u jedné přepážky

# Jednoduchý exponenciální MHO

## Diagram systému M/M/1



příchody za hod. $\sim \mathsf{Po}(\lambda)$

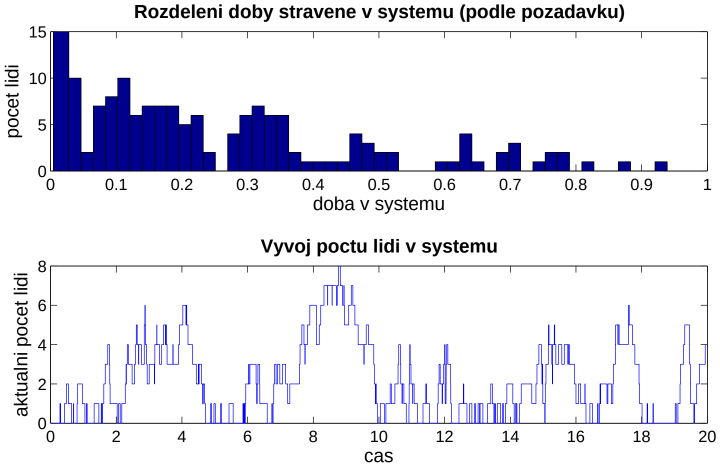
FIFO

obsluha $\sim \mathsf{Ex}(\mu)$

Hledané charakteristiky: $L$, $W$, $L_q$, $W_q$, p-st výskytu fronty dané délky atd.

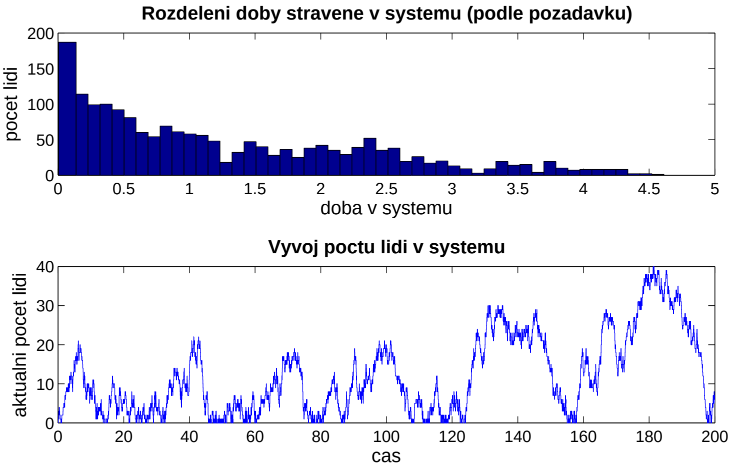
# Simulovaný chod M/M/1

$\lambda = 9,\ \mu = 10,\ $ 20 časových jednotek:



## Simulovaný chod M/M/1

$\lambda = 9, \ \mu = 10, \ 200$ časových jednotek:



# Matice intenzit pro M/M/1

Model průběhu počtu lidí:

- stavy $S = \{0, 1, \dots\}$ = počet požadavků *v systému*
- intenzity se odvodí analogicky jako v Poissonově procesu

## Pozorování

Matice intenzit v M/M/1 modelu má tvar

$$\boldsymbol{Q} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & & & \\ & \mu & -\lambda-\mu & \lambda & & \\ & & \mu & -\lambda-\mu & \lambda & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \end{array}.$$

## Stacionární p-sti v M/M/1

Z podmínky $\boldsymbol{\alpha Q} = \mathbf{0}$ máme:

$$\begin{aligned} -\lambda\alpha_0 + \mu\alpha_1 &= 0 \\ \lambda\alpha_0 + (-\lambda-\mu)\alpha_1 + \mu\alpha_2 &= 0 \\ &\dots \\ \lambda\alpha_{i-1} + (-\lambda-\mu)\alpha_i + \mu\alpha_{i+1} &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Označíme $x_i = \mu\alpha_{i+1} - \lambda\alpha_i$ a soustavu přepíšeme jako

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_1 - x_0 &= 0, \\ &\dots \\ x_i - x_{i-1} &= 0. \\ &\dots \end{aligned}$$

## Stacionární p-sti v M/M/1 (pokrač.)

**Pozorování**

Stacionární p-sti v M/M/1 modelu splňují $x_i = \mu\alpha_{i+1} - \lambda\alpha_i = 0$ pro všechna $i \geq 0$.

Přepíšeme-li rovnici za použití *intenzity provozu* $\rho = \lambda/\mu$, dostaneme

$$\alpha_i = \rho\alpha_{i-1} = \rho^2\alpha_{i-2} = \rho^i\alpha_0\,.$$

Víme dále, že $\sum_{i\in S}\alpha_i = 1$, tedy při $\rho < 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\alpha_0 = \frac{\alpha_0}{1-\rho} = 1.$$

## Stacionární p-sti v M/M/1 (pokrač.)

- Máme tedy $\alpha_0 = 1 - \rho$ a $\alpha_i = \alpha_0 \rho^i = (1-\rho)\rho^i$.
- Jaká je p-st, že bude v systému aspoň 1 požadavek?

$$\Pr\{\text{v systému} \geq 1\} = 1 - \alpha_0 = 1 - (1-\rho) = \rho.$$

- Podobně:

$$\begin{aligned}\Pr\{\text{v systému} \geq n\} &= 1 - (\alpha_0 + \ldots + \alpha_{n-1}) \\ &= \underbrace{1 - 1}_{0} + \underbrace{\rho - \rho}_{0} + \underbrace{\rho^2 - \rho^2}_{0} + \ldots + \rho^n \\ &= \rho^n.\end{aligned}$$

## Základní charakteristiky M/M/1 modelu

### Pozorování

Stacionární p-sti v M/M/1 existují, právě když $\rho = \lambda/\mu < 1$ (tzv. *podmínka stability*), a platí

$$\alpha_i = (1-\rho)\rho^i, \qquad i = 0, 1, \ldots$$

V náhodném okamžiku při dlouhodobém chodu systému můžeme vyjádřit

$$\Pr\{\text{v systému aspoň } n \text{ jednotek}\} = \alpha_{\geq n} = \rho^n,$$

tedy např.

$$\Pr\{\text{fronta} \geq 1\} = \alpha_{\geq 2} = \rho^2.$$

Průměrná vytíženost obslužného zařízení je $\rho$, resp. $100\rho\,\%$.

## Matematické okénko

Dávno všichni víme, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\rho^n = n\rho^{n-1}.$$

Toho můžeme využít při sčítání následující nekonečné řady (při $|\rho| < 1$):

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\\ &= \frac{1}{(1-\rho)^2}.\end{aligned}$$

Tento výsledek za chvíli využijeme.

## Průměrný počet jednotek v systému

$$
\begin{aligned}
L &= \mathsf{E}(\text{počet jednotek v systému}) \\
&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} n \Pr\{\text{v systému} = n\} \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n \\
&= (1-\rho)\rho \underbrace{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}}_{1/(1-\rho)^2} \\
&= \frac{\rho}{1-\rho} \\
&= \frac{\lambda}{\mu-\lambda}.
\end{aligned}
$$

## Průměrné charakteristiky v M/M/1

Zřejmě platí:

$$
\begin{aligned}
L &= L_q + L_s\,, && \text{(někde musí být)}\\
W &= W_q + W_s && \text{(někde musí trávit čas)}
\end{aligned}
$$

a dále

$$
\begin{aligned}
L_s &= \rho, && \text{(vytíženost)}\\
W_s &= 1/\mu. && \text{(zadání)}
\end{aligned}
$$

Odtud a za použití Littleova zákona na systém jako celek i frontu, tj.

$$
\begin{aligned}
W &= L/\lambda,\\
W_q &= L_q/\lambda,
\end{aligned}
$$

snadno odvodíme i vzorce pro ostatní průměrné charakteristiky.

# Průměrné charakteristiky v M/M/1 (pokrač.)

## Pozorování

Průměrné charakteristiky v M/M/1 modelu jsou:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \qquad W = \frac{1}{\mu - \lambda},$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}, \qquad W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)},$$

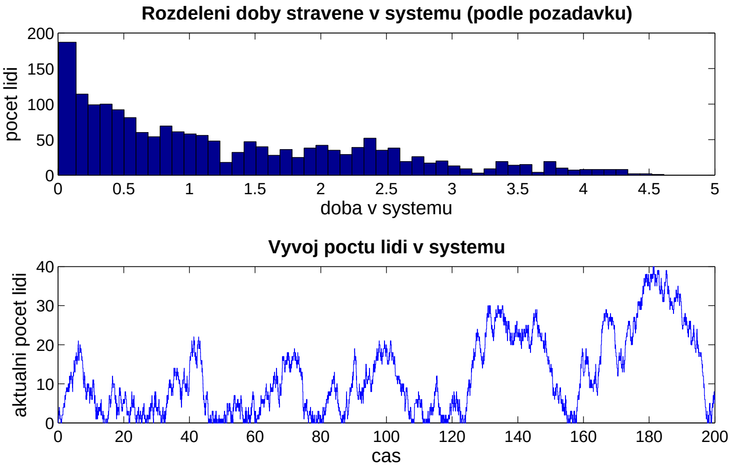
$$L_s = \lambda/\mu, \qquad W_s = 1/\mu.$$

# Matematické okénko

- před námi ve frontě je $n-1$ lidí, $n$-tý je na kase, která pracuje s intenzitou $\mu$
- za jak dlouho budeme hotovi?
- zřejmě
$$\text{doba v systému} = T = S_1 + \ldots + S_{n+1},$$
kde $S_i \sim \mathsf{Ex}(\mu)$, iid (*independent identically distributed*)
- platí, že součet má *Erlangovo rozdělení* s parametry $(n+1, \mu)$ s hustotou
$$h(x) = \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!}$$
- záhy tento výsledek použijeme

# Rozdělení doby v systému pro M/M/1

Chtěli bychom odvodit tvar rozdělení z prvního grafu:



## Rozdělení doby v systému pro M/M/1 (pokrač.)

- $T =$ čas strávený v systému náhodně vybraným požadavkem
- hledáme distribuční funkci pro $T$, tj. funkci $F$ danou jako

$$F(t) = \Pr\{T \leq t\}$$

- pravděpodobnost určíme rozborem případů podle počtu požadavků *v okamžiku příchodu*:

$$\Pr\{T \leq t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\{T \leq t | n \text{ v systému}\} \Pr\{n \text{ v systému}\}$$

- používáme vlastně staré dobré pravidlo

$$\Pr\{A\} = \textstyle\sum_n \Pr\{A \,|\, B_n\} \Pr\{B_n\},$$

kde $B_n$ jsou neslučitelné možné jevy, $\bigcup B_n$ jev jistý

## Rozdělení doby v systému pro M/M/1 (pokrač.)

$\Pr\{T \le t | n \text{ v systému}\}$ dostaneme z Erlangova rozdělení (integrujeme hustotu $h$ od 0 do $t$), $\Pr\{n \text{ v systému}\} = \alpha_n$.

$$\begin{aligned}
\Pr\{T \le t\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^t h(x)\,\mathrm{d}x\right] \alpha_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^t \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x\right] (1-\rho)\rho^n \\
&= \int_0^t (\mu-\lambda) e^{-\mu x} \underbrace{\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!}}_{=\exp(\lambda x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t (\mu-\lambda) e^{-(\mu-\lambda)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-e^{-(\mu-\lambda)x}\right]_0^t \\
&= 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}
\end{aligned}$$

# Rozdělení doby v systému pro M/M/1 (pokrač.)

**Pozorování**

Označme dobu strávenou ve stabilním systému M/M/1 náhodným požadavkem jako $T$. Potom platí:

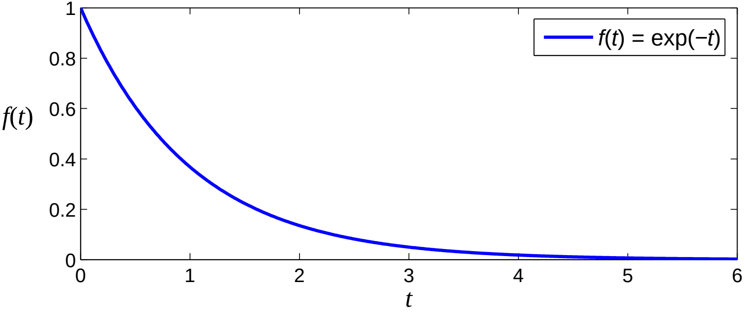
$$F(t) = \Pr\{T \leq t\} = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t} \qquad \text{pro } t > 0,$$

neboli $T \sim \mathsf{Ex}(\mu - \lambda)$.

Mj. je odtud okamžitě vidět, že střední doba strávená v systému je $1/(\mu - \lambda)$, což se shoduje s naším předchozím výsledkem.

# Rozdělení doby v systému pro M/M/1 (pokrač.)

Pro $\lambda = 9$, $\mu = 10$ máme $T \sim \mathsf{Ex}(1)$ s hustotou:




Všimněte si podobnosti s histogramy ze simulací.

# Procesy množení a zániku

- zobecnění modelu M/M/1
- intenzity příchodu/obsluhy se mohou měnit podle aktuálního stavu
- to je třeba případ modelu M/M/$c$: pracuje-li aktuálně více strojů, je větší intenzita obsluhy
- obecný zápis matice intenzit:

$$
\boldsymbol{Q} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
-\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\
\mu_1 & -\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & & \\
 & \mu_2 & -\lambda_2-\mu_2 & \lambda_2 & \\
 & & \mu_3 & -\lambda_3-\mu_3 & \lambda_3 \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots
\end{bmatrix} \end{array}
$$

## Stacionární p-sti v procesu množení a zániku

Z podmínky $\boldsymbol{\alpha Q} = \mathbf{0}$ máme:

$$\begin{aligned} -\lambda_0\alpha_0 + \mu_1\alpha_1 &= 0 \\ \lambda_0\alpha_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 &= 0 \\ &\dots \\ \lambda_{i-1}\alpha_{i-1} - (\lambda_i + \mu_i)\alpha_i + \mu_{i+1}\alpha_{i+1} &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Označíme $x_i = \mu_{i+1}\alpha_{i+1} - \lambda_i\alpha_i$ a soustavu přepíšeme jako

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_1 - x_0 &= 0, \\ &\dots \\ x_i - x_{i-1} &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

## Stacionární p-sti v procesu množení a zániku (pokrač.)

Je tedy nutně $x_i = \mu_{i+1}\alpha_{i+1} - \lambda_i\alpha_i = 0$ pro všechna $i \geq 0$, neboli pro $i \geq 1$ máme

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\alpha_{i-1} \\ &= \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}\alpha_0 . \end{aligned}$$

Víme dále, že $\sum_{i\in S}\alpha_i = 1$, tedy musí platit

$$\alpha_0\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i} = 1,$$

což je možné pouze tehdy, když nekonečná řada nalevo konverguje (člen řady pro $i = 0$ interpretujeme jako 1).

# Stacionární p-sti v procesu množení a zániku (pokrač.)

## Pozorování

Stacionární p-sti v procesu množení a zániku existují, právě když

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} < \infty.$$

(Člen řady pro $i = 0$ interpretujeme jako 1.) V takovém případě platí

$$\alpha_0 = \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \right]^{-1},$$

$$\alpha_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \alpha_0.$$

# Model M/M/$c$

- $c$ paralelních obslužných zařízení *se společnou frontou*
- značení: $\mu$ = intenzita obsluhy *pro jedno zařízení*
- jedná se o proces množení a zániku, kde

$$\lambda_i = \lambda \quad \text{pro všechna } i,$$

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu & \text{pro } 0 < i < c, \\ c\mu & \text{pro } i \geq c, \end{cases}$$

  neboť intenzita obsluhy je úměrná počtu pracujících zařízení

- můžeme tedy najít stacionární p-sti dosazením do obecných vzorců pro procesy množení a zániku

## Model M/M/$c$ (pokrač.)

Uvažujme nejprve $0 < i < c$:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \left[\frac{\lambda}{1\mu}\frac{\lambda}{2\mu}\cdots\frac{\lambda}{i\mu}\right]\alpha_0 \\ &= \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \alpha_0 \\ &= \frac{(c\rho)^i}{i!}\alpha_0, \end{aligned}$$

kde $\rho = \lambda/(c\mu)$ je *intenzita provozu* v M/M/$c$. Všimněte si, že první a poslední výraz se rovnají i pro $i = 0$.

# Model M/M/$c$ (pokrač.)

Pro $i \geq c$ máme analogicky

$$\alpha_i = \Bigg[\frac{\lambda}{1\mu}\frac{\lambda}{2\mu}\cdots\frac{\lambda}{c\mu}\;\underbrace{\frac{\lambda}{c\mu}\cdots\frac{\lambda}{c\mu}}_{i-c\text{ součinitelů}}\Bigg]\alpha_0$$

$$= \frac{1}{c!c^{i-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\alpha_0$$

$$= \frac{c^c\rho^i}{c!}\alpha_0,$$

kde opět $\rho = \lambda/(c\mu)$. Dále platí

$$\sum_{i=c}^{\infty}\alpha_i = \frac{c^c}{c!}\alpha_0\sum_{i=c}^{\infty}\rho^i = \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}\alpha_0.$$

## Model M/M/$c$ (pokrač.)

### Pozorování

Stacionární p-sti v M/M/$c$ existují, právě když $\rho = \lambda/(c\mu) < 1$, a v takovém případě platí

$$\alpha_0 = \left[\sum_{i=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^i}{i!} + \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}\right]^{-1},$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \dfrac{(c\rho)^i}{i!}\alpha_0 & \text{pro } i < c, \\ \dfrac{c^c\rho^i}{c!}\alpha_0 & \text{pro } i \geq c. \end{cases}$$

Podmínce $\rho < 1$ říkáme opět *podmínka stabilizace* systému.

## Model M/M/$c$ (pokrač.)

Ještě se může hodit následující výpočet:

$$
\begin{aligned}
\Pr\{\text{fronta} \geq n\} &= \Pr\{\text{v systému} \geq n+c\} \\
&= \sum\nolimits_{i=n+c}^{\infty} \Pr\{\text{v systému} = i\} \\
&= \sum\nolimits_{i=n+c}^{\infty} \alpha_i \\
&= \sum\nolimits_{i=n+c}^{\infty} \frac{c^c \rho^i}{c!} \alpha_0 \\
&= \alpha_0 \frac{c^c}{c!} \sum\nolimits_{i=n+c}^{\infty} \rho^i \\
&= \alpha_0 \frac{c^c \rho^{n+c}}{c!(1-\rho)}
\end{aligned}
$$

# Stochastické modely: prezentace k přednášce

Jan Zouhar

Katedra ekonometrie FIS VŠE v Praze

16. února 2017