

7. Vybrané aplikace optimalizačních modelů

V této kapitole se budeme věnovat dvěma typům úloh, pro jejichž řešení se využívají optimalizační principy. Jedná se o modely analýzy obalu dat, které se využívají pro hodnocení relativní efektivity a výkonnosti souboru produkčních jednotek, a dále o modely vícekritériálního programování, jejichž cílem je zpravidla nalezení kompromisu mezi navzájem protikladnými kritérii.

7.1 Modely analýzy obalu dat

Modely analýzy obalu dat (*DEA* - Data Envelopment Analysis) byly navrženy jako specializovaný modelový nástroj pro hodnocení efektivity, výkonnosti či produktivity homogenních produkčních jednotek.

Pod pojmem homogenní produkční jednotky budeme rozumět soubor jednotek, které se zabývají produkcí identických nebo ekvivalentních efektů, které budeme označovat jako *výstupy* této jednotky. Budeme uvažovat především žádoucí, tedy pozitivní efekty, tzn. takové, jejichž vyšší hodnota vede, za jinak nezměněných podmínek, k vyšší výkonnosti dané jednotky. Pro vytváření efektů spotřebovává produkční jednotka *vstupy*, které jsou naopak svojí povahou minimalizační, tzn. nižší hodnota těchto vstupů vede k vyšší výkonnosti sledované jednotky. Budeme-li uvažovat při hodnocení efektivity jeden vstup (typickým vstupem může být počet pracovníků pobočky, firmy, zdravotnického zařízení apod.) a jeden výstup (typicky to mohou být tržby, zisk, počet pacientů apod.), potom lze efektivity sledované jednotky vyjádřit velmi snadno příslušným poměrovým ukazatelem

$$\frac{\text{výstup}}{\text{vstup}}.$$

Dostáváme tak ukazatele jako jsou tržby nebo zisk na pracovníka, počet pacientů na jednoho lékaře atd. Pro hodnocené jednotky lze však definovat celou řadu podobných poměrových ukazatelů, které vycházejí z různých údajů a jejichž výsledky nemusí být a v typickém případě ani nejsou ve vzájemném souladu. Při hodnocení celkové efektivity dané jednotky je proto třeba vzít do úvahy větší počet vstupů, ale i výstupů.

Uvažujme, že máme soubor homogenních jednotek $U_1, U_2, \dots, U_n$. Při sledování efektivity těchto jednotek uvažujeme r výstupů a m vstupů.

Označme $\mathbf{X} = \{x_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$ matici vstupů a podobně $\mathbf{Y} = \{y_{ij}, i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, n\}$ matici výstupů. Míru efektivnosti jednotky U_q můžeme vyjádřit obecně jako

$$\frac{\text{vážený součoučetupů}}{\text{vážený součoučet tupů}} = \frac{\sum_i u_i y_{iq}}{\sum_j v_j x_{jq}}, \quad (7.1)$$

kde $v_j, j = 1, 2, \dots, m$ jsou váhy přiřazené j -tému vstupu a $u_i, i = 1, 2, \dots, r$ jsou váhy přiřazené i -tému výstupu.

DEA modely vycházejí z toho, že pro daný problém existuje tzv. *množina přípustných možností* tvořená všemi možnými (přípustnými) kombinacemi vstupů a výstupů. Množina přípustných možností je určena tzv. *efektivní hranicí*. Produkční jednotky, jejichž kombinace vstupů a výstupů leží na efektivní hranici, jsou efektivními jednotkami, protože se nepředpokládá, že by mohla reálně existovat jednotka, která dosáhne stejných výstupů s nižšími vstupy, případně vyšších výstupů s nižšími vstupy.

Případ jednoho vstupu a jednoho výstupu

Množinu přípustných možností a efektivní hranici zde budeme ilustrovat na malém numerickém příkladu. Uvažujme obchodní řetězec s osmi pobočkami. Každá z poboček je charakterizována jedním vstupem x (počet pracovníků) a jedním výstupem y (průměrné denní tržby v desítkách tisíc Kč). Konkrétní údaje jsou obsažené v tabulce 7.1.

Pobočka	U ₁	U ₂	U ₃	U ₄	U ₅	U ₆	U ₇	U ₈
Počet pracovníků (x)	12	7	9	3	7	2	9	4
Tržby (y)	14	12	11	3	4	6	6	9
Tržby/počet prac. (y/x)	1,17	1,71	1,22	1,00	0,57	3,00	0,67	2,25

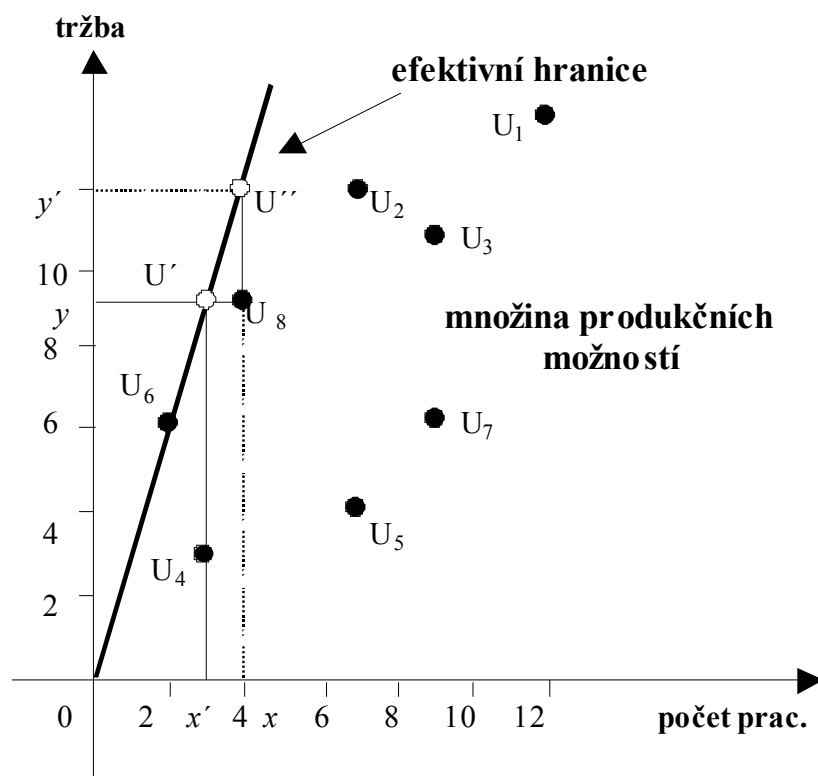
Tab. 7.1: *Vstupní data pro případ jednoho vstupu a výstupu*

Pro odvození toho, jakou podobu má efektivní hranice a jak tedy vypadá množina produkčních možností, je třeba přijmout předpoklad o charakteru výnosů z rozsahu pro danou úlohu. Výnosy z rozsahu mohou být konstantní, variabilní, rostoucí nebo klesající.

Z předpokladu *konstantních výnosů z rozsahu* (CRS – *constant returns to scale*) plyne, je-li kombinace vstupů a výstupů $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ prvkem množiny

přípustných možností, potom je prvkem této množiny i kombinace $(\alpha x, \alpha y)$, kde $\alpha > 0$. Znamená to, že-li nějaká produkční jednotka s kombinací vstupů a výstupů (x, y) jednotkou efektivní, potom bude efektivní i jednotka $(\alpha x, \alpha y)$. Pro náš ilustrační příklad je efektivní hranice a množina produkčních možností znázorněná na obr. 7.1. Je zde patrné, že efektivní hranice zde tvoří obal dat, který je kónický. Jedinou efektivní jednotkou (tedy jednotkou, která leží na efektivní hranici) je zde jednotka U_6 . To je v tomto případě v souladu s vypočtenými tržbami na jednoho pracovníka, které jsou pro tuto jednotku nejvyšší – viz tabulka 7.1.

Ostatní jednotky jsou neefektivní, což lze dokumentovat například na jednotce U_8 – ta dosahuje výstup $y = 9$, přičemž spotřebovává vstup ve výši $x = 4$. S hodnotami $(4; 9)$ není však na efektivní hranici. Aby se na tuto hranici dostala, musela by buď:



Obr. 7.1: Množina produkčních možností – konstantní výnosy z rozsahu

1. Zvýšit hodnotu produkovaného výstupu na hranici y' při zachování současné úrovně vstupu x . Dostáváme tak tzv. *virtuální jednotku* U'' s virtuálním vstupem a výstupem $(x, y') = (4; 12)$. Snažíme se tedy maximalizovat hodnotu výstupu (obecně výstupů) při zachování úrovně vstupu (vstupů). Modely, které se snaží najít virtuální jednotku

maximalizací výstupů, se označují jako *modely orientované na výstupy* (*output oriented*).

2. Snížit hodnotu spotřebovávaného vstupu na úroveň x' při zachování současné úrovně výstupu y . Dostáváme tak virtuální jednotku U' s virtuálním vstupem a výstupem $(x', y) = (3; 9)$. Zde se jedná o minimalizaci hodnoty vstupu (obecně vstupů) při zachování dané úrovně výstupu (výstupů). Modely, které se snaží najít virtuální jednotku minimalizací výstupů, se označují jako *modely orientované na vstupy* (*input oriented*).
3. Kombinací obou předcházejících možností. Tento přístup se používá v modelech, které se označují jako *aditivní* nebo *odchylkové modely* (*additive models, slack-based models*).

V našem ilustračním příkladu jsou všechny jednotky kromě U_6 za předpokladu konstantních výnosů z rozsahu jednotkami neefektivními. Jejich míru efektivnosti můžeme získat porovnáním tržeb na zaměstnance s tržbami na zaměstnance jednotky U_6 :

$$0 \leq \frac{\text{tržba na zaměstnanec} / \text{hodnocené jednotky}}{\text{tržba na zaměstnanec} / \text{jednotky } U_6} \leq 1$$

Pro jednotku U_8 tak získáváme míru efektivnosti $2,25/3,00 = 0,75$. V této souvislosti je třeba si uvědomit, že se jedná o *relativní míru efektivnosti*. Relativní proto, že její hodnota závisí na celém souboru jednotek. Přidáme-li tedy do souboru novou jednotku, která změní efektivní hranici, změní se i míry efektivnosti ostatních jednotek. Míru efektivnosti jednotky U_8 lze snadno odvodit z obr. 7.1:

1. Pro model orientovaný na výstupy to bude podíl $y/y' = 9/12 = 0,75$. Je to tedy podíl tržby jednotky U_8 s tržbami virtuální jednotky U' . Z hlediska interpretace je vhodnější pracovat u výstupově orientovaného modelu s převrácenou hodnotou $y'/y = 12/9 = 1,33$. Tu lze interpretovat jako potřebnou míru navýšení výstupu (tržeb) pro dosažení efektivní hranice.
2. Pro model orientovaný na vstupy se bude jednat o podíl $x/x' = 3/4 = 0,75$. Je to podíl počtu zaměstnanců jednotky U_8 s počtem zaměstnanců virtuální jednotky U' . Tento ukazatel lze v tomto případě přímo interpretovat jako potřebnou míru redukce vstupu (počtu zaměstnanců) pro dosažení efektivní hranice.

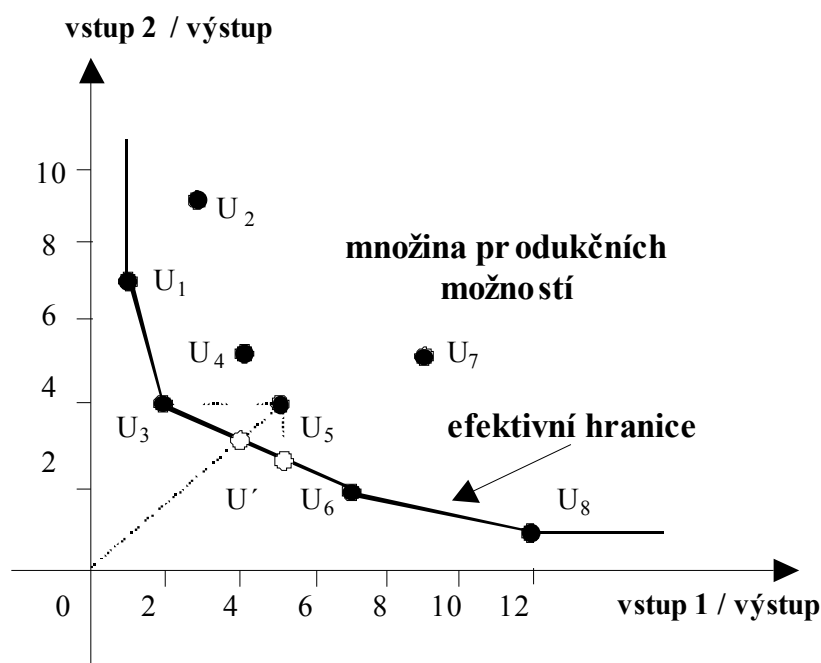
V této souvislosti si lze všimnout, že jsou u obou modelů (při orientaci na vstupy i výstupy) míry efektivnosti shodné.

Případ dvou vstupů a jednoho výstupu

Pro znázornění situace, kdy je každá jednotka charakterizována dvěma vstupy a jedním výstupem, budeme předpokládat, že výstupy všech jednotek jsou shodné, jednotkové. Samozřejmě, že tento předpoklad neodpovídá realitě, ale lze jej splnit tak, že oba vstupy nahradíme jejich podílem s hodnotami výstupu, tj. Vstup 1 / Výstup a Vstup 2 / Výstup. Dostáváme tak vstupy na jednotku výstupu. To lze již velmi snadno znázornit grafem, který je pro jednoduchý ilustrační příklad znázorněný na obr. 7.3. Vstupní údaje pro tento příklad jsou v tabulce 7.2.

Jednotka	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8
Vstup 1 (x^1)	1	3	2	4	5	7	9	12
Vstup 2 (x^2)	7	9	4	5	4	2	5	1
Výstup (y^1)	1	1	1	1	1	1	1	1

Tab. 7.2: Vstupní data pro případ dvou vstupů a jednoho výstupu



Obr. 7.3: Množina produkčních možností – dva vstupy

Z hlediska efektivity budou nižší hodnoty vstupů na jednotku výstupu vést k vyšší efektivitě. Z grafu na obr. 7.3 je zřejmé, že

efektivními jednotkami zde jsou jednotky U_1 , U_3 , U_6 a U_8 . Jsou to jednotky, ke kterým neexistují jiné jednotky s lepšími hodnotami obou vstupů na jednotku výstupů. Současně ani neexistuje žádná lineární kombinace ostatních jednotek, která by vykazovala lepší (přesněji ne horší) hodnoty sledovaných charakteristik. Uvedené jednotky budou označeny jako efektivní a budou vytvářet efektivní hranici, která je na obr. 7.3 zvýrazněna silnou lomenou čarou. Tato efektivní hranice zde opět definuje množinu produkčních možností.

Ostatní jednotky našeho příkladu efektivní nejsou. To lze ilustrovat na případě jednotky U_5 . Tato jednotka neleží na efektivní hranici a různé DEA modely se liší pouze v tom, jakým způsobem měří vzdálenost od efektivní hranice. Tato vzdálenost je potom vlastně mírou efektivnosti hodnocené jednotky. Základní DEA modely, které budeme formulovat dále v tomto oddílu, měří tuto vzdálenost radiálně a určují tak v podstatě míru redukce obou vstupů pro dosažení efektivní hranice. V tomto případě dostáváme virtuální jednotku tak, jak je znázorněno na obr. 7.3 – jedná se o jednotku U' . Míra efektivnosti je zde potom určena jako podíl $0U'/0U_5$. Pro náš ilustrační příklad lze poměrně snadno odvodit, že vstupy na jednotku výstupu virtuální jednotky U' jsou (4; 3,2). Míra efektivnosti jednotky U_5 je tedy $4/5 = 3,2/4 = 0,8$. Tuto hodnotu lze interpretovat i tak, že pro dosažení efektivní hranice musí jednotka U_5 snížit oba vstupy na 80 % současné hodnoty (při zachování současné úrovně výstupu).

Kromě radiálního způsobu měření vzdálenosti od efektivní hranice lze použít řadu dalších možností. Na obr. 7.3 jsou znázorněny další dvě. Aby se jednotka U_5 stala efektivní, stačilo by snížit první vstup ze současné hodnoty 5 na úroveň 2 při zachování úrovně druhého vstupu i výstupu. Dostali bychom tak virtuální jednotku se vstupy (2; 4) – v tomto případě by byla tato virtuální jednotka totožná s reálnou jednotkou U_2 . Druhou znázorněnou možností je snížit druhý vstup ze současné úrovně 4 na hodnotu 2,8. Virtuální jednotka se vstupy (5; 2,8) by již ležela na efektivní hranici.

Případ jednoho vstupu a dvou výstupů

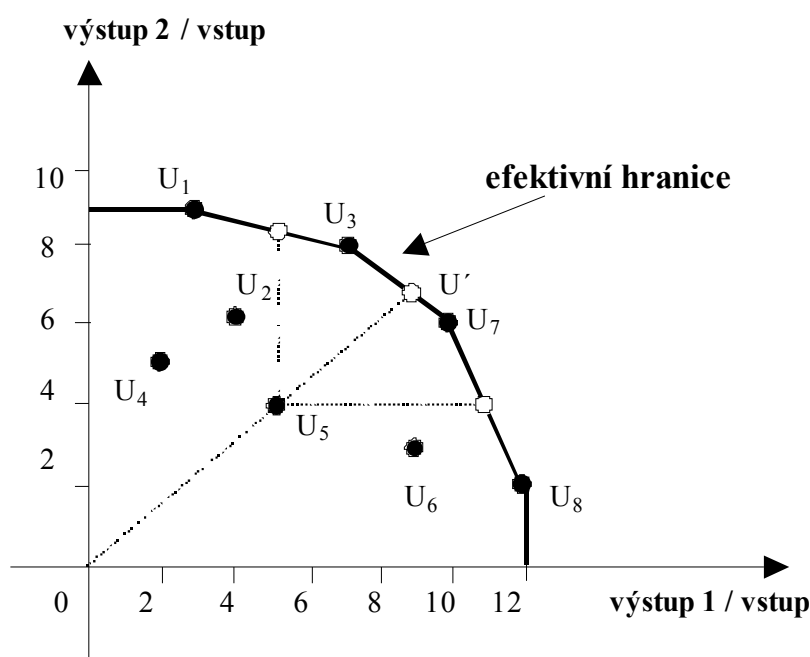
Budeme-li uvažovat ilustrační příklad s jedním vstupem a dvěma výstupy, bude se v mnohém jednat o analogii předcházejícího případu. Uvažujeme zde jednotkový vstup nebo spíše výstupy na jednotku vstupu (např. tržby na jednoho pracovníka, počet zákazníků na pracovníka apod.) Data pro velmi jednoduchý ilustrační příklad jsou obsažena v tabulce 1.3.

Jednotka	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8
----------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Vstup (x^1)	1	1	1	1	1	1	1	1
Výstup 1 (y^1)	3	4	7	2	5	9	10	12
Výstup 2 (y^2)	9	6	8	5	4	3	6	2

Tab. 7.3: Vstupní data pro případ jednoho vstupu a dvou výstupů

Situace, která odpovídá vstupním datům, je znázorněna na obr. 7.4. Je zřejmé, že vyšší výstupy povedou k vyšší efektivnosti. Efektivní hranice je zde proto tvořena jednotkami U_1 , U_3 , U_7 a U_8 . Jednotky U_2 , U_4 , U_5 a U_6 nejsou efektivní, což je v tomto příkladu naprosto evidentní, neboť ke všem těmto jednotkám existuje jiná reálná jednotka, která je lepší v obou charakteristikách. Například k jednotce U_5 s výstupy (5; 4) lze najít jednotku U_7 s výstupy (10; 6).



Obr. 7.4: Množina produkčních možností – dva výstupy

Dosáhnout efektivní hranici lze zde podobně jako v předcházející ilustraci. Radiální způsob hledá virtuální jednotku (na obr. 7.4 označena U'), která bude projekcí zvolené neefektivní jednotky na efektivní hranici. Výsledkem je míra efektivnosti, která určuje, o kolik procent je třeba navýšit oba výstupy pro dosažení efektivnosti. Na obr. 7.4. je tato situace ilustrována na případu jednotky U_5 . Míra efektivnosti je zde určena podílem OU'/OU_5 . Výpočtem by bylo možné se přesvědčit, že výstupy virtuální

jednotky U' jsou (8,64; 6,91). Míra efektivnosti jednotky U_5 je tedy $8,64/5 = 6,91/4 = 1,727$. Znamená to, že se jednotka U_5 dostane na efektivní hranici, pokud navýší oba své výstupy o cca 73 %.

Všimněte si, že v předchozím případě byla míra efektivnosti u neefektivních jednotek nižší než jedna, zde je naopak vyšší než jedna. Vysvětluje to i interpretace obou situací. V předchozím případě vyjadřovala míra efektivnosti potřebnou redukci vstupů pro dosažení efektivní hranice (jedná se o model orientovaný na vstupy). Zde udává míra efektivnosti potřebné navýšení výstupů pro dosažení efektivní hranice (model orientovaný na výstupy).

Kromě radiálního způsobu dosažení efektivní hranice lze aplikovat i jiné přístupy. Další dvě možnosti pro jednotku U_5 jsou znázorněny na obr. 7.4. Lze navýšit první výstup beze změny druhého. Dostáváme tak virtuální jednotku s výstupy (11;4), která už leží na efektivní hranici. Analogicky lze navýšit druhý výstup beze změny prvního. Virtuální jednotka, která leží na efektivní hranici, je zde charakterizována výstupy (5; 8,5).

Základní modely analýzy obalu dat

CCR model

První DEA model byl navržen Charnesem, Cooperem a Rhodesem v roce 1978. Podle autorů tohoto modelu bývá označován jako *CCR model*. Tento model maximalizuje míru efektivnosti hodnocené jednotky U_q , která je vyjádřena jako podíl vážených výstupů a vážených vstupů (7.1), při dodržení podmínek, že míry efektivnosti všech ostatních jednotek jsou menší nebo rovny jedné. Pro každou jednotku tak dostáváme pomocí vah pro vstupy v_i , $i = 1, 2, \dots, m$, virtuální vstup a pomocí vah pro výstupy u_i , $i = 1, 2, \dots, r$, virtuální výstup:

$$\begin{aligned}\text{virtuální vstup} &= v_1 x_{1q} + v_2 x_{2q} + \dots + v_m x_{mq}, \\ \text{virtuální výstup} &= u_1 y_{1q} + u_2 y_{2q} + \dots + u_r y_{rq}.\end{aligned}$$

CCR DEA model počítá váhy vstupů a výstupů optimalizačním výpočtem tak, aby to bylo pro hodnocenou jednotku co nejpríznivější z hlediska její efektivnosti (maximalizuje se míra efektivnosti hodnocené jednotky) při dodržení podmínek maximální jednotkové efektivnosti všech ostatních jednotek. Celý model lze pro jednotku U_q formulovat jako úlohu lineárního lomeného programování následovně:

$$\text{maximalizovat } z = \frac{\sum_i^r u_i y_{iq}}{\sum_j^m v_j x_{jq}},$$

$$\begin{aligned}
\text{za podmínek} \quad & \frac{\sum_i^r u_i y_{ik}}{\sum_j^m v_j x_{jk}} \leq 1, & k = 1, 2, \dots, n, \\
& u_i \geq \varepsilon, & i = 1, 2, \dots, r, \\
& v_j \geq \varepsilon, & j = 1, 2, \dots, m,
\end{aligned} \tag{7.2}$$

kde z je míra efektivnosti jednotky U_q , ε je infinitezimální konstanta, pomocí které model zabezpečuje, že všechny váhy vstupů a výstupů budou kladné a budou tak tedy alespoň nějakou minimální měrou v modelu zahrnuty, x_{ik} , $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$, je hodnota i -tého vstupu pro jednotku U_k a y_{ik} , $i = 1, 2, \dots, r$, $k = 1, 2, \dots, n$, je hodnota i -tého výstupu pro jednotku U_k . Hodnoty vstupů a výstupů jsou uspořádány do matic $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$, které mají rozměr (m, n) resp. (r, n) :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{r1} & y_{r2} & \dots & y_{rn} \end{bmatrix}.$$

Úloha (7.2) může být snadno převedena na standardní úlohu lineárního programování pomocí Charnes-Cooperovy transformace, která je popsána v části 3.3. těchto skript. Upravená úloha má potom následující podobu:

$$\begin{aligned}
\text{maximalizovat} \quad & z = \sum_i^r u_i y_{iq}, \\
\text{za podmínek} \quad & \sum_i^r u_i y_{ik} \leq \sum_j^m v_j x_{jk}, & k = 1, 2, \dots, n, \\
& \sum_j^m v_j x_{jq} = 1, \\
& u_i \geq \varepsilon, & i = 1, 2, \dots, r, \\
& v_j \geq \varepsilon, & j = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Hodnocená jednotka U_q leží na CCR efektivní hranici a označuje se jako *CCR efektivní* v případě, že optimální hodnota míry efektivnosti, vypočtená

modelem (7.3), je rovna jedné, tj. $z^* = 1$. Pro neefektivní jednotky bude platit, že je jejich míra efektivnosti nižší než jedna. Model (7.3) bývá označován jako *primární CCR model orientovaný na vstupy* (primární CCR-I model).

Z výpočetního hlediska i z hlediska interpretace je někdy výhodné pracovat s modelem, který je duálně sdružený k modelu (7.3). Tento model se někdy označuje jako *duální CCR model orientovaný na vstupy* (duální CCR-I model) a jeho formulace vypadá následovně:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimalizovat} && \theta_q \\
 &\text{za podmínek} && \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \theta_q x_{iq}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & && \sum_{j=1}^n y_{ij} \lambda_j \geq y_{iq}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\
 & && \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

kde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\lambda \geq 0$, je vektor vah, které jsou přiřazené daným jednotkám. Jedná se o vektor proměnných tohoto modelu. Další proměnnou je zde θ_q , která je mírou efektivnosti hodnocené jednotky U_q . Proměnná θ_q se může rovněž interpretovat jako potřebná míra redukce vstupů pro dosažení efektivní hranice a její hodnota bude menší nebo rovna jedné.

Při hodnocení jednotky U_q se model pokouší najít virtuální jednotku charakterizovanou vstupy $\mathbf{X}\lambda$ a výstupy $\mathbf{Y}\lambda$, které jsou lineární kombinací vstupů a výstupů ostatních jednotek daného souboru a které jsou lepší (nebo přesněji nejsou horší) než vstupy a výstupy hodnocené jednotky U_q . Pro vstupy a výstupy virtuální jednotky musí tedy platit $\mathbf{X}\lambda \leq \theta_q \mathbf{x}_q$ a $\mathbf{Y}\lambda \geq \mathbf{y}_q$, kde $\mathbf{x}_q$ a $\mathbf{y}_q$ jsou vektory vstupů a výstupů jednotky U_q . Jednotka U_q je označena za efektivní, pokud virtuální jednotka s uvedenými vlastnostmi neexistuje, resp. virtuální jednotka je totožná s hodnocenou jednotkou, tzn. platí $\mathbf{X}\lambda = \mathbf{x}_q$ a $\mathbf{Y}\lambda = \mathbf{y}_q$. To nastává právě tehdy, je-li proměnná $\theta_q = 1$. Současně však musí být rovny nule všechny přídatné proměnné, které převádějí nerovnosti v modelu (7.4) na rovnost. Po doplnění těchto proměnných do tohoto modelu bude mít výpočetní tvar CCR-I modelu následující tvar (použijeme úspornější maticový zápis):

$$\begin{aligned}
 &\text{minimalizovat} && z = \theta_q - \varepsilon(\mathbf{e}^T \mathbf{s}^+ + \mathbf{e}^T \mathbf{s}^-), \\
 &\text{za podmínek} && \mathbf{X}\lambda + \mathbf{s}^- = \theta_q \mathbf{x}_q, \\
 & && \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s}^+ = \mathbf{y}_q, \\
 & && \lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq \mathbf{0},
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

kde $\mathbf{s}^+$ a $\mathbf{s}^-$ jsou vektory přídatných proměnných v omezeních pro vstupy a výstupy, $\mathbf{e}^T = (1, 1, \dots, 1)$ a ε je infinitesimální konstanta, která se volí zpravidla rovna 10^{-8} . Hodnocená jednotka U_q je efektivní, jsou-li splněny následující dvě podmínky:

1. Optimální hodnota proměnné θ^*_q je rovna jedné.
2. Optimální hodnoty všech přídatných proměnných s_i^{+*} , $i = 1, 2, \dots, r$ a s_i^{-*} , $i = 1, 2, \dots, m$ jsou rovny nule.

Jednotka U_q je tedy CCR efektivní, pokud je optimální hodnota účelové funkce modelu (7.5) rovna jedné. V opačném případě jednotka efektivní není. Optimální hodnota účelové funkce z^* se označuje jako míra efektivnosti hodnocené jednotky (vzhledem k nekonečně malé hodnotě konstanty ε se z^* v podstatě shoduje s optimální hodnotou θ^*_q). Je evidentní, že čím nižší je tato míra, tím méně je hodnocená jednotka efektivní v rámci uvažovaného souboru jednotek. U neefektivních jednotek je zpravidla optimální hodnota θ^*_q menší než jedna. Tato hodnota potom ukazuje potřebu proporcionálního snížení (tedy zlepšení) vstupů tak, aby se jednotka U_q stala efektivní. Výrazným rysem a výhodou DEA modelů není tedy pouze to, že umožňují získat odhad míry efektivnosti pro jednotky daného souboru a na základě této míry jednotky uspořádat, ale především skutečnost, že poskytují rozhodovateli informace o tom, jakým způsobem by se mělo zlepšit chování hodnocené jednotky tak, aby se tato jednotka stala efektivní. Získat tyto cílové hodnoty pro dosažení efektivní hranice (označíme je $\mathbf{x}_q'$ a $\mathbf{y}_q'$) lze z optimálních výsledků modelu (7.5) dvojím způsobem:

1. $\mathbf{x}_q' = \mathbf{X}\lambda^*$, $\mathbf{y}_q' = \mathbf{Y}\lambda^*$, kde λ^* je vektor optimálních hodnot vah vypočtených modelem (7.5).
2. $\mathbf{x}_q' = \theta^*_q \mathbf{x}_q - \mathbf{s}^{*-}$, $\mathbf{y}_q' = \mathbf{y}_q + \mathbf{s}^{*+}$, kde symboly s hvězdičkou (*) jsou vektory optimálních hodnot proměnných modelu (7.5).

Modely (7.3) a (7.5) jsou modely, které jsou orientované na vstupy – snaží se zjistit, jakým způsobem zlepšit vstupní charakteristiky hodnocených jednotek tak, aby se jednotky staly efektivními. Analogicky lze formulovat modely orientované na výstupy. *Primární CCR model orientovaný na výstupy* (primární CCR-O model) je formulován takto:

minimalizovat
$$g = \sum_j v_j x_{jq},$$

$$\begin{aligned}
\text{za podmínek} \quad & \sum_i^r u_i y_{ik} \leq \sum_j^m v_j x_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\
& \sum_i^r u_i y_{iq} = 1, \\
& u_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\
& v_j \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Duální CCR model orientovaný na výstupy (duální CCR-O model) se potom v maticové podobě formuluje takto:

$$\begin{aligned}
\text{maximalizovat} \quad & g = \phi_q + \varepsilon(\mathbf{e}^T \mathbf{s}^+ + \mathbf{e}^T \mathbf{s}^-), \\
\text{za podmínek} \quad & \mathbf{X}\lambda + \mathbf{s}^- = \mathbf{x}_q, \\
& \mathbf{Y}\lambda - \mathbf{s}^+ = \phi_q \mathbf{y}_q, \\
& \lambda, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Interpretace výsledků modelu (7.7) je podobná, jako tomu bylo u předcházejícího modelu (7.5). Jednotka U_q je efektivní, je-li optimální hodnota účelové funkce $g^* = 1$. Pokud je tato hodnota větší než jedna, jednotka efektivní není a optimální hodnota proměnné ϕ_q^* zde vyjadřuje potřebu proporcionálního navýšení výstupů pro dosažení efektivnosti. Cílové hodnoty vstupů a výstupů $\mathbf{x}_q'$ a $\mathbf{y}_q'$ pro CCR model orientovaný na výstupy se získají analogicky předchozímu modelu:

1. $\mathbf{x}_q' = \mathbf{X}\lambda^*$, $\mathbf{y}_q' = \mathbf{Y}\lambda^*$, kde λ^* je vektor optimálních hodnot vah vypočtených modelem (7.7).
2. $\mathbf{x}_q' = \mathbf{x}_q - \mathbf{s}^{*-}$, $\mathbf{y}_q' = \phi_q^* \mathbf{y}_q + \mathbf{s}^{*+}$, kde symboly s hvězdičkou (*) jsou vektory optimálních hodnot proměnných modelu (7.7)

Pro optimální řešení CCR modelů při orientaci na vstupy a na výstupy platí, že jsou míry efektivnosti (hodnoty účelových funkcí obou modelů) převrácené hodnoty, tj. $z^* = 1/g^*$.

BCC model

CCR model předpokládá konstantní výnosy z rozsahu a definuje tak kónický obal dat. V roce 1984 navrhli Banker, Charnes a Cooper modifikaci tohoto modelu, která uvažuje variabilní výnosy z rozsahu (klesající, rostoucí nebo i konstantní). Tento model bývá často označován jako BCC model. V tomto případě se kónický obal dat mění na konvexní, což vede k tomu, že je při použití BCC modelu označen za efektivní vyšší počet jednotek. Tuto skutečnost jsme ilustrovali na jednoduchém příkladu v předcházejícím oddílu této kapitoly – viz obr. 7.1 a 7.2. Pro analýzu efektivnosti jednotek při uvažování variabilních výnosů z rozsahu stačí modely (7.5) a (7.7)

rozšířit o podmínku konvexnosti $\mathbf{e}^T \boldsymbol{\lambda} = 1$. Duální BCC model orientovaný na vstupy (duální BCC-I model) bude mít tedy následující podobu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & z = \theta_q - \varepsilon(\mathbf{e}^T \mathbf{s}^+ + \mathbf{e}^T \mathbf{s}^-), \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{X}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{s}^- = \theta_q \mathbf{x}_q, \\ & \mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{s}^+ = \mathbf{y}_q, \\ & \mathbf{e}^T \boldsymbol{\lambda} = 1, \\ & \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}^+, \mathbf{s}^- \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

kde všechny symboly použité v této formulaci mají stejnou interpretaci jako u modelu (7.5). Naprosto shodným způsobem lze zde získat i cílové hodnoty vstupů a výstupů pro neefektivní jednotky. Stejně tak lze identifikovat *BCC efektivní* jednotky. Musí opět platit, že hodnota radiální proměnné θ_q je rovna jedné a současně všechny přídatné proměnné s_i^+ , s_i^- jsou rovny nule, tzn. optimální hodnota účelové funkce modelu (7.8) $z^* = 1$. Jednotky, které nejsou efektivní, mají hodnotu $z^* < 1$. Formulaci duálního BCC modelu orientovaného na výstupy si čtenář jistě doplní sám.

Pro úplnost zde ještě uvádíme matematický model primárního BCC modelu orientovaného na vstupy (primární BCC-I model):

$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & z = \sum_i^r u_i y_{iq} + \mu, \\ \text{za podmínek} \quad & \sum_i^r u_i y_{ik} + \mu \leq \sum_j^m v_j x_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ & \sum_j^m v_j x_{jq} = 1, \\ & u_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ & v_j \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ & \mu - \text{libovolné.} \end{aligned} \quad (7.9)$$

kde μ je duální proměnná přiřazená podmínce konvexnosti $\mathbf{e}^T \boldsymbol{\lambda} = 1$ modelu (7.8). Modely (7.8) a (7.9) jsou navzájem duálně sdružené, a proto jsou optimální hodnoty účelových funkcí obou modelů shodné a stejně tak je i interpretace výsledků shodná. Modely (7.3) a (7.9) se liší pouze v tom, jakých hodnot může nabývat proměnná μ . V CCR modelu je hodnota této proměnné rovna nule - $\mu = 0$, v BCC modelu může být tato proměnná libovolná (může nabývat kladných i záporných hodnot a samozřejmě i nulové hodnoty).

Vzhledem k tomu, že formulace primárního BCC modelu orientovaného na výstupy (primární BBC-O model) nemusí být zřejmá, uvádíme ji zde také:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimalizovat} && g = \sum_i^m v_j x_{jq} + v, \\
 &\text{za podmínek} && \sum_i^r u_i y_{ik} \leq \sum_j^m v_j x_{jk} + v, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\
 & && \sum_i^r u_i y_{iq} = 1, \\
 & && u_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\
 & && v_j \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\
 & && v - \text{libovolné},
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

kde v je duální proměnná příslušející podmínce konvexnosti $e^T \lambda = 1$ duálního BCC-O modelu. Pro BCC efektivní jednotky je optimální hodnota účelové funkce g^* rovna jedné, pro neefektivní jednotky je větší než jedna a udává míru navýšení výstupů pro dosažení efektivní hranice.

Jak jsme již uvedli, předpokládají CCR modely konstantní výnosy z rozsahu (CRS) a BCC modely variabilní výnosy z rozsahu (VRS). Malou úpravou podmínek pro součet proměnných λ v duálních modelech (bez ohledu na orientaci modelu), podmínek pro hodnoty proměnné μ primárního modelu orientovaného na vstupy (7.9) a proměnné v modelu orientovaného na výstupy (7.10), můžeme dostat další modifikace těchto modelů předpokládající neklesající výnosy z rozsahu (NDRS - *non-decreasing returns to scale*) případně nerostoucí výnosy z rozsahu (NIRS - *non-increasing returns to scale*). Přehledně uvádí modifikaci těchto podmínek tabulka 7.4.

Výnosy z rozsahu	primární model (7.9)	primární model (7.10)	duální model (7.8)
CRS - konstantní	$\mu = 0$	$v = 0$	$e^T \lambda$ - libovolné
VRS - variabilní	μ - libovolné	v - libovolné	$e^T \lambda = 1$
NIRS - nerostoucí	$\mu \leq 0$	$v \geq 0$	$e^T \lambda \leq 1$
NDRS - neklesající	$\mu \geq 0$	$v \leq 0$	$e^T \lambda \geq 1$

Tab. 7.4: Modifikace podmínek pro různé výnosy z rozsahu

Příklad 7.1 – základní ilustrace DEA modelů

Výše uvedené modely a jejich výsledky budeme ilustrovat na numerickém příkladu, jehož vstupy a výstupy jsou uvedeny v tabulce 7.1. Pro konstantní výnosy z rozsahu byl tento příklad graficky řešen na obr. 7.1, pro variabilní výnosy z rozsahu na obr. 7.2. Z těchto obrázků je patrné, že jako CCR-efektivní je v této úloze pouze jediná jednotka U_6 . Pro BCC model se kónický CCR obal mění na konvexní a počet BCC efektivních jednotek je zde vyšší. V této úloze se konkrétně jedná o jednotky U_1 , U_2 , U_6 a U_8 . Ukážeme si nejprve, jak zde konkrétně vypadá formulace CCR modelu orientovaného na vstupy při hodnocení efektivnosti jednotky U_3 - použijeme duální CCR-I model (7.4). Příslušná úloha lineárního programování bude mít následující podobu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & z = \theta_3 - \varepsilon(s_1^+ + s_1^-), \\ \text{za podmíněk} \quad & 12\lambda_1 + 7\lambda_2 + \dots + 2\lambda_6 + \dots + 4\lambda_8 + s_1^- = 9\theta_3, \\ & 14\lambda_1 + 12\lambda_2 + \dots + 6\lambda_6 + \dots + 9\lambda_8 - s_1^+ = 11, \\ & \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 8, s_1^- \geq 0, s_1^+ \geq 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Tato úloha má optimální řešení $z^* = \theta_3^* = 0,4074$, $s_1^- = 0$, $s_1^+ = 0$, $\lambda_6^* = 1,833$ a všechny ostatní proměnné λ jsou rovny nule. Jednotka U_3 tedy není CCR-efektivní a její míra efektivnosti je 0,4074. Aby se efektivní stala, musela by snížit svůj vstup (počet pracovníků) z hodnoty 9 na hodnotu $2.1,833 = 9 \cdot 0,4074 = 3,667$.

Pokud bychom použili BCC model, stačí doplnit úlohu (7.12) o podmínku:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_8 = 1.$$

Optimální řešení takto upravené úlohy je $z^* = \theta_3^* = 0,6667$, $s_1^- = 0$, $s_1^+ = 0$, $\lambda_2^* = 0,667$, $\lambda_8^* = 0,333$ a všechny ostatní proměnné λ jsou rovny nule. Jednotka U_3 tedy není ani BCC-efektivní a její míra efektivnosti je 0,6667. Aby se efektivní stala, musela by snížit počet pracovníků z hodnoty 9 na hodnotu $7.0,667 + 4.0,333 = 9.0,667 = 6$.

V tabulce 7.5 jsou obsaženy pro každou jednotku vypočtené míry efektivnosti (pro CCR-I i BCC-I model) a cílové hodnoty vstupů. Cílové hodnoty výstupů se v tomto případě nemění, a proto je neuvádíme.

Pro úplnost uvádíme i konkrétní formulaci primárního CCR-I modelu (7.3) pro hodnocení efektivnosti jednotky U_3 :

$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & z = 11u_1, \\ \text{za podmíněk} \quad & 14u_1 \leq 12v_1, \quad 12u_1 \leq 7v_1, \\ & 11u_1 \leq 9v_1, \quad 3u_1 \leq 3v_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4u_1 &\leq 7v_1, & 6u_1 &\leq 2v_1, \\
6u_1 &\leq 9v_1, & 9u_1 &\leq 4v_1, \\
9v_1 &= 1, \\
u_1 &\geq \varepsilon, & v_1 &\geq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Uvedená optimalizační úloha má řešení $v_1 = 0,111$ a $u_1 = 0,037$ s hodnotou účelové funkce $z^* = 0,4074$, jejíž hodnota je shodná s optimální hodnotou účelové funkce úlohy (7.12).

	CCR-I model			BCC-I model		
	míra efektivnosti	hodnota		míra efektivnosti	hodnota	
		původní	cílová		původní	cílová
U₁	0,3889	12	4,666	1,0000	12	12,000
U₂	0,5714	7	4,000	1,0000	7	7,000
U₃	0,4074	9	3,666	0,6667	9	6,000
U₄	0,3333	3	1,000	0,6667	3	2,000
U₅	0,1905	7	1,333	0,2857	7	2,000
U₆	1,0000	2	2,000	1,0000	2	2,000
U₇	0,2222	9	2,000	0,2222	9	2,000
U₈	0,7500	4	3,000	1,0000	4	4,000

Tab. 7.5: Výsledky DEA analýzy (CCR a BCC model)

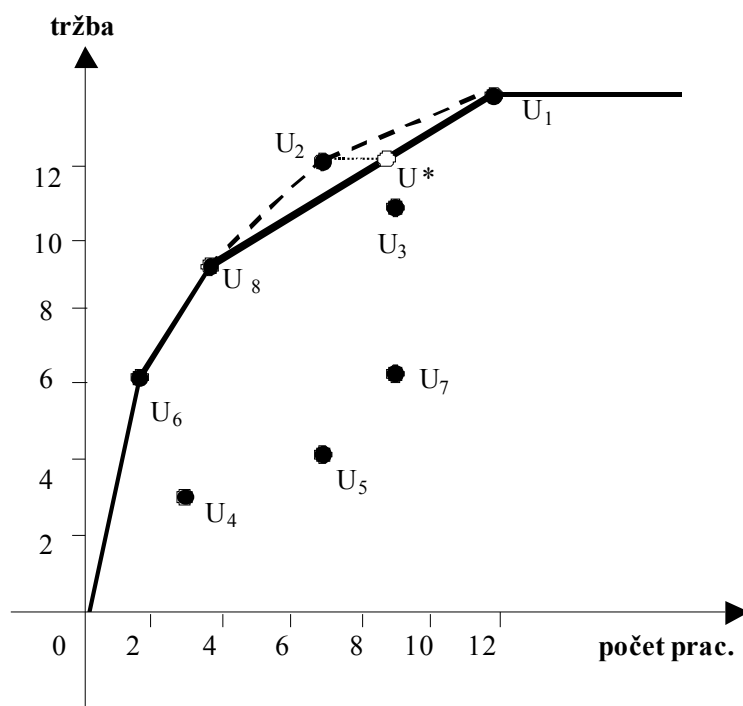
Modely super efektivnosti

V základních DEA modelech, o kterých jsme se zmínili v předcházejících oddílech, je efektivním jednotkám přiřazena jednotková míra efektivnosti. V závislosti na typu zvoleného modelu, ale především na vztahu mezi počtem jednotek a počtem vstupů a výstupů, může být ale efektivních jednotek poměrně velký počet. Kvůli možnosti klasifikace efektivních jednotek bylo navrženo několik definic tzv. super efektivnosti. V DEA modelech super efektivnosti získávají původní efektivní jednotky míru super efektivnosti vyšší než jedna (pro modely orientované na vstupy) nebo nižší než jedna (pro modely orientované na výstupy). Tato skutečnost umožňuje klasifikaci efektivních jednotek, což může být jedna z důležitých informací, které uživatel požaduje.

Všechny modely super efektivnosti jsou založeny na tom, že se při výpočtu míry super efektivnosti váha původní efektivní jednotky položí rovna nule (hodnocená jednotka se takto v podstatě vyjme ze souboru jednotek), což má za následek změnu původní efektivní hranice. Model

super efektivnosti potom měří vzdálenost mezi vstupy a výstupy hodnocené jednotky od nové efektivní hranice.

Tato skutečnost je ilustrována na příkladu z úvodu tohoto oddílu. Uvažujeme BCC efektivní hranici (viz obr. 7.2) a výpočet super efektivnosti pro jednotku U_2 . Po vyjmutí jednotky U_2 ze souboru se původní BCC efektivní hranice, která je na obr. 7.5 vyznačena čárkovaně, modifikuje tak, jak je naznačeno na obrázku. Míra super efektivnosti je potom vlastně vzdálenost bodu U_2 od nové efektivní hranice a jednotlivé DEA modely super efektivnosti se liší v tom, jak tuto vzdálenost měří. Na obr. 7.5 je vyznačena jedna možnost – super efektivnost je vzdálenost mezi body U_2 a U^* .



Obr. 7.5: Super efektivnost

Prvním modelem super efektivnosti byl model Andersena a Petersena (1993), který je pro konstantní výnosy z rozsahu formulován následovně:

minimalizovat θ_q ,

$$\text{za podmíněk } \sum_{j=1, j \neq q}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = \theta_q x_{iq}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (7.13)$$

$$\sum_{j=1, \neq q}^n y_{ij} \lambda_j - s_i^+ = y_{iq}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$\lambda_j \geq 0, \lambda_q = 0, s_i^+ \geq 0, s_i^- \geq 0.$$

Pro variabilní výnosy z rozsahu je tento model doplněn podmínkou $e^T \lambda = 1$ s tím, že $\lambda_q = 0$.

Příklad 7.2 – hodnocení efektivnosti firem

Výsledky, které poskytují DEA modely (CCR a BCC) budeme ilustrovat na příkladu hodnocení efektivnosti firem. Jedná se o české firmy z odvětví výroby nábytku s minimálním počtem pracovníků 50. Každá z firem je charakterizována čtyřmi vstupy - celkové náklady v milionech Euro, počet pracovníků, mzdové náklady v milionech Euro a disponibilní plocha pro výrobu v m² – a jedním výstupem, kterým je obrat firmy v milionech Euro. Konkrétní data jsou uvedena v tabulce 7.6.

Firma	Náklad y mil.Euro	Počet prac.	Mzd.nákl. mil. Euro	Plocha m ²	Obrat mil.Euro
1	2,400	100	0,733	1 500	2,600
2	5,433	117	0,833	3 600	6,167
3	2,767	65	0,600	3 000	3,000
4	36,667	1 748	0,110	86 500	34,333
5	6,767	202	1,067	3 200	7,367
6	1,800	138	0,800	5 600	2,333
7	3,667	92	0,400	5 000	3,733
8	2,700	110	0,667	4 000	2,300
9	1,867	112	0,667	4 800	1,967
10	4,433	106	0,700	3 000	4,400
11	3,067	80	0,500	5 372	3,633
12	1,600	53	0,233	1 200	1,600
13	2,000	59	0,567	2 400	1,967
14	2,633	102	0,933	5 000	2,667
15	7,333	389	2,800	27 000	7,267
16	15,367	544	4,033	2 000	15,100
17	21,300	600	4,633	30 000	19,933
18	2,267	71	0,400	2 018	2,300
19	5,067	61	0,667	2 800	4,900

Tab. 7.6: Vstupní data – hodnocení firem

Míry efektivnosti vypočtené CCR-I a BCC-I modelem jsou obsaženy v tabulce 7.7. Je patrné, že jednotky BCC-efektivní jsou současně CCR-efektivní. Kromě těchto údajů obsahuje tabulka 7.7 míry super efektivnosti vypočtené podle Andersenova a Petersenova modelu (7.13). Tyto míry jsou samozřejmě vypočtené pouze pro jednotky, které bylo standardním modelem hodnoceny jako efektivní. Symbol „xxxx“ v posledním sloupci u čtvrté firmy udává, že míru super efektivnosti není možné daným modelem spočítat - úloha (7.13) nemá přípustné řešení.

Firm a	CCR-I model	CCR-I supereff	BCC-I model	BCC-I supereff
1	0,962		1,000	1,039
2	1,000	1,084	1,000	1,107
3	0,939		1,000	1,013
4	1,000	33,441	1,000	xxxx
5	1,000	1,117	1,000	1,150
6	1,000	1,094	1,000	1,183
7	0,986		1,000	1,038
8	0,717		0,757	
9	0,839		0,911	
10	0,874		0,890	
11	1,000	1,039	1,000	1,070
12	0,889		1,000	1,716
13	0,843		0,952	
14	0,841		0,865	
15	0,796		0,907	
16	1,000	3,280	1,000	9,846
17	0,798		1,000	1,411
18	0,883		0,950	
19	1,000	1,524	1,000	1,577

Tab. 7.7: *Míry efektivnosti – hodnocení firem*

V závěru této části uvádíme v tabulce 7.8 přehled všech DEA modelů, které byly v této části skript formulovány (jedná se o duální formulace). Účelová funkce a omezující podmínky jsou z tabulky 7.8 při orientaci na vstupy i výstupy zřejmé. Podle předpokladu o charakteru výnosů z rozsahu je třeba zvolit vždy jednu z uvedených podmínek, případně zvolit podmínku pro model super efektivnosti.

DEA modely (duální formulace)**orientace na vstupy****orientace na výstupy**

$$\min \quad z = \theta - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{i=1}^r s_i^+ \right),$$

$$\max \quad g = \phi + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{i=1}^r s_i^+ \right),$$

$$\text{za podm. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{iq},$$

$$\text{za podm. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{iq},$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{ij} - s_i^+ = y_{iq},$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{ij} - s_i^+ = \phi y_{iq},$$

$$\lambda_j \geq 0, s_i^+ \geq 0, s_i^- \geq 0,$$

CRS (konstantní)

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j - \text{free},$$

VRS (variabilní)

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$$

NDRS (neklesající)

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j < 1,$$

NIRS (nerostoucí)

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j > 1,$$

super efektivnost

$$\lambda_q = 0.$$

Tab. 7.8: Přehled DEA modelů**7.2 Vícekriteriální a cílové programování**

Úlohy vícekriteriálního programování jsou úlohy, ve kterých se na množině přípustných řešení optimalizuje několik skalárních účelových (kriteriálních) funkcí. Množina přípustných řešení je přitom definována podobně jako v úlohách matematického programování. Za předpokladu linearity omezujících podmínek i účelových funkcí se mluví o úlohách vícekriteriálního lineárního programování. Tuto úlohu můžeme matematicky formulovat následovně:

„maximalizovat“

$$z_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n,$$

$$z_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n,$$

⋮

$$z_k = c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \dots + c_{kn}x_n,$$

(7.14)

za podmínek

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1,$$

$$\begin{aligned}
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\
& x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Symbol „maximalizace“ je úmyslně uveden v uvozovkách, protože nelze jednoznačně definovat, co se rozumí současnou maximalizací několika účelových funkcí. Úlohu (7.14)-(7.15) je možné zapsat maticově:

„maximalizovat“

$$\begin{aligned}
z_1 &= \mathbf{c}^1 \mathbf{x}, \\
z_2 &= \mathbf{c}^2 \mathbf{x}, \\
&\vdots \\
z_k &= \mathbf{c}^k \mathbf{x},
\end{aligned} \tag{7.16}$$

za podmínek

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}, \tag{7.17}$$

kde $\mathbf{c}^i, i = 1, 2, \dots, k$ je vektor cenových koeficientů i -té účelové funkce.

Cílem při řešení úloh vícekriteriálního lineárního programování (VLP) je zpravidla nalezení nějakého *kompromisního řešení*, to je řešení, které bude kompromisem mezi definovanými účelovými funkcemi. Pro výpočet kompromisního řešení úlohy VLP je možné použít několik základních principů. Všechny z nich zpravidla vedou k řešení jedné či několika standardních úloh lineárního programování. Toto řešení se provádí běžnými postupy pro řešení lineárních optimalizačních úloh (simplexová metoda). Kompromisní řešení získané podle všech principů musí splňovat podmínku nedominovanosti, tzn. musí to být takové řešení, ke kterému neexistuje jiné přípustné řešení, které by bylo lepší (nebo by nebylo horší) podle všech účelových funkcí. Je to podmínka pochopitelná, protože kdyby splněna nebyla, potom by bylo vhodnější vzít jako kompromisní řešení právě to řešení, které je lepší (není horší) podle všech účelových funkcí.

1. Princip agregace účelových funkcí

Tento princip je založený na ohodnocení důležitosti kriteriálních funkcí vahami $v_1, v_2, \dots, v_k, \Sigma v_i = 1$. Místo úlohy (7.16)-(7.17) se potom řeší běžná úloha lineárního programování:

maximalizovat

$$z = \sum_{i=1}^k v_i \mathbf{c}^i \mathbf{x}, \tag{7.18}$$

za podmínek (7.17).

Za předpokladu nezápornosti všech vah účelových funkcí lze snadno dokázat, že tímto způsobem získáme vždy nedominované řešení.

2. Kompromisní řešení podle principu minimaxu

Cílem tohoto principu je nalézt takové kompromisní řešení, které bude maximalizovat minimální, tedy nejhorší, hodnotu ze všech kritériálních funkcí. Označíme-li tuto minimální komponentu D , potom lze kompromisní řešení podle minimální komponenty najít jako řešení následující úlohy lineárního programování:

maximalizovat

$$D,$$

za podmínek

$$\mathbf{c}^1 \mathbf{x} \geq D,$$

$$\mathbf{c}^2 \mathbf{x} \geq D,$$

:

$$\mathbf{c}^k \mathbf{x} \geq D,$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

(7.19)

3. Minimalizace vzdálenosti od ideálních hodnot

Ideální hodnotu pro i -tou účelovou funkci označíme z_i^{opt} . Jedná se o optimální hodnotu této účelové funkce na množině přípustných řešení. Ideální hodnotu by bylo možné získat optimalizací příslušné účelové funkce běžnou simplexovou metodou. Při použití tohoto principu hledáme takové kompromisní řešení, které bude minimalizovat vážený součet odchylek od ideálních hodnot. Budeme tedy řešit úlohu lineárního programování:

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^k v_i (z_i^{\text{opt}} - \mathbf{c}^i \mathbf{x}), \quad (7.20)$$

za podmínek $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$,

kde $v_i > 0$, je váha i -té účelové funkce.

4. Cílové programování

Pro získání kompromisního řešení úlohy VLP se velmi často používá *cílové programování*. Úloha cílového programování obsahuje v typickém případě několik základních částí:

1. *Pevné cíle* jsou podmínky, které jsou vyjádřeny ve formě nerovnic nebo rovnic a které musí být v modelu respektovány, tzn. nelze akceptovat

takové řešení, které by některý z pevných cílů nesplňovalo. V matematickém vyjádření mají pevné cíle podobu omezujících podmínek v běžné úloze lineárního programování, tj.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

2. *Volné cíle* jsou podmínky, které jsou bilancí mezi hodnotou “levé strany” omezující podmínky a mezi zadanou cílovou hodnotou. U volných cílů se používají pro vyjádření kladných a záporných odchylek od daných cílových hodnot *odchylkové proměnné*. Záporné odchylkové proměnné od i -té cílové hodnoty budeme označovat d_i^- , kladné odchylkové proměnné d_i^+ . Obecný zápis i -tého bilančního omezení může tedy vypadat následovně:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = g_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

kde $\sum c_{ij} x_j$ je levá strana omezující podmínky a g_i je příslušná cílová hodnota.

3. *Účelová funkce* modelu cílového programování je obecně vyjádřena jako minimalizace odchylek od zadaných cílových hodnot, tj. jedná se o minimalizaci součtu odchylkových proměnných. Do účelové funkce lze zahrnout buď záporné nebo kladné nebo oba typy odchylkových proměnných:
- *minimalizace záporné odchylky* vede k získání řešení, které se “zdola” co nejvíce přibližuje dané cílové hodnotě, může být však libovolně vyšší než tato cílová hodnota - použití například tehdy, vyjadřuje-li cílová hodnota požadavek na dosažení zadané úrovně zisku,
 - *minimalizace kladné odchylky* vede k získání řešení, které se “shora” co nejvíce přibližuje dané cílové hodnotě, může být však libovolně nižší než tato cílová hodnota - například požadavek na získání řešení, které se co nejvíce přibližuje cílovým nákladům,
 - *minimalizace součtu kladné a záporné odchylky* vede k získání řešení, které se “oboustranně” co nejvíce přibližuje dané cílové hodnotě - například požadavek na pokud možno co nejúplnější využití nějakého zdroje (aby nic nezbylo a nebylo třeba zdroj dodatečně rozšiřovat).

V jakémkoliv, i velmi malém, modelu cílového programování může být cílů definováno několik. Důležitost těchto cílů může být vyjádřena buď jejich uspořádáním od nejdůležitějšího po nejméně důležitý (lexikografické cílové programování), nebo pomocí bezrozměrných koeficientů (vah), které vyjadřují stupeň důležitosti splnění cíle. Pokud odlišíme důležitost cílů vahami (což bývá častější případ), můžeme minimalizovat:

- vážený součet odchylek nebo
- maximální váženou odchylku.

Při *minimalizaci váženého součtu odchylek* bude celá úloha cílového programování naformulována následovně:

minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^k (v_i^- d_i^- + v_i^+ d_i^+) \quad (7.21)$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, & i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ &= g_i, & i = 1, 2, \dots, k, \\ d_i^- \geq 0, d_i^+ \geq 0, d_i^- d_i^+ &= 0, & i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

kde v_i^- a v_i^+ jsou váhy, ohodnocující důležitost záporných a kladných odchylek volného cíle g_i .

Při minimalizaci vážené maximální odchylky se výše uvedený model bude modifikovat následovně:

minimalizovat

$$D, \quad (7.22)$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, & i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ &= g_i, & i = 1, 2, \dots, k, \\ v_i^- d_i^- + v_i^+ d_i^+ &\leq D, & i = 1, 2, \dots, k, \\ d_i^- \geq 0, d_i^+ \geq 0, d_i^- d_i^+ &= 0, & i = 1, 2, \dots, k, \end{aligned}$$

kde proměnná D představuje maximální hodnotu vážené odchylky, kterou se snažíme minimalizovat.

Ve všech uvedených principech pro výpočet kompromisního řešení je třeba sledovat, zda jsou hodnoty dílčích účelových funkcí navzájem

srovnatelné. Pokud tomu tak není, tzn. některé hodnoty jsou v tisících, jiné třeba jen v jednotkách, je třeba výše uvedené formulace optimalizačních úloh modifikovat tak, že váhy účelových funkcí v úlohách (7.18) a (7.20) a levou stranu omezujících podmínek v úloze (7.19) vydělíme jejich ideálními hodnotami z_i^{opt} . Po této úpravě budou všechny ideální hodnoty rovny 1 (100 %) a my budeme vlastně pracovat s procentními odchylkami. V úlohách cílového programování (7.21) a (7.22) doporučujeme vydělit váhy odchylek cílovými hodnotami, a tak vlastně minimalizovat procentní odchylky od cílových hodnot, které jsou již vzájemně srovnatelné.

Modely cílového programování jsou obecnější než standardní modely LP, protože často skutečně nelze jednoznačně určit jediné kritérium optimality. Uživatelům je většinou bližší zadání nějakých žádoucích (cílových) hodnot, ke kterým se v průběhu optimalizace shora či zdola přibližuje.

Příklad 7.3 – kompromisní řešení v úlohách VLP

V truhlářské dílně, která zaměstnává zdravotně postižené dělníky, se vyrábí dřevěný nábytek – židle, stoly a lavice. Na výrobu jedné židle je potřeba 3 kg dřeva a 2 m² látky, dělník potřebuje na její smontování 30 minut. Židle se prodává za 200 Kč, z čehož 100 Kč tvoří zisk pro dílnu. Pro další výrobky jsou údaje v následující tabulce:

	židle	stůl	lavice
dřevo [kg]	3	5	4
látka [m ²]	2	0	5
práce [min]	30	60	40
cena [Kč]	200	300	600
zisk [Kč]	100	200	200

Tab. 7.9: *Vstupní údaje pro úlohu VLP*

Na týden je v dílně k dispozici 500 kg dřeva a 400 m² látky na potahy. Aby dílna vůbec mohla fungovat, musí být její týdenní zisk alespoň 20 000 Kč. Dílna si klade za cíl zaměstnat co nejvíce zdravotně postižených dělníků při současné maximalizaci příjmu z prodeje nábytku a minimalizaci škodlivého dopadu výroby na životní prostředí. Vliv na životní prostředí je vyjádřen pomocí trestných bodů. Tyto body jsou ovlivněny především spotřebou dřeva, ale také množstvím lepidla, které je pro výrobu nezbytné (spotřeba lepidla nemá podstatný vliv na cenu výrobků, proto není zahrnuta

do dalších výpočtů). Vliv výroby na životní prostředí byl ohodnocen takto: židle 2 trestné body, stůl 5 bodů a lavice 3 body. Matematický model výše popsaného problému může být formulován takto:

“maximalizovat”

$$\begin{aligned} z_1 &= 200x_1 + 300x_2 + 600x_3 & [\text{Kč}] \\ z_2 &= 30x_1 + 60x_2 + 40x_3 & [\text{min}] \\ z_3 &= -2x_1 - 5x_2 - 3x_3 & [\text{body}] \end{aligned} \quad (7.23)$$

za podmínek

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\leq 500 & [\text{kg}] \\ 2x_1 + 0x_2 + 5x_3 &\leq 400 & [\text{m}^2] \\ 100x_1 + 200x_2 + 200x_3 &\geq 20000 & [\text{Kč}] \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Pro potřeby výpočtů byla poslední účelová funkce, která vyjadřuje minimalizaci dopadu na životní prostředí, převedena na maximalizační typ vynásobením hodnotou (-1) . V následujícím přehledu uvádíme optimální řešení získaná samostatnou maximalizací jednotlivých dílčích účelových funkcí:

$$\begin{aligned} \max z_1: \quad \mathbf{x}_1^{\text{opt}} &= (0, 36, 80), & z_1^{\text{opt}} &= 58800, \\ \max z_2: \quad \mathbf{x}_2^{\text{opt}} &= (0, 100, 0) & z_2^{\text{opt}} &= 6000, \\ \max z_3: \quad \mathbf{x}_3^{\text{opt}} &= (0, 20, 80) & z_3^{\text{opt}} &= -340. \end{aligned}$$

Při výpočtu kompromisního řešení jednotlivými, výše uvedenými postupy, budeme pracovat s vektorem vah $\mathbf{v} = (0,3; 0,6; 0,1)$. Dále budeme ilustrovat výpočet kompromisních řešení podle jednotlivých, výše popsaných, principů.

1. Agregace účelových funkcí

Agregovanou účelovou funkci (7.18) zde můžeme vyjádřit takto:

$$z = 0,3 \frac{200x_1 + 300x_2 + 600x_3}{58800} + 0,6 \frac{30x_1 + 60x_2 + 40x_3}{6000} - 0,1 \frac{2x_1 + 5x_2 + 3x_3}{340}$$

Poslední člen v agregované funkci odečítáme, protože se snažíme penalizovat vyšší hodnoty dopadu na životní prostředí. Budeme tedy maximalizovat uvedenou agregovanou funkci za podmínek (7.24). Optimální řešení a současně kompromisní řešení úlohy VLP je potom dané vektorem proměnných $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0, 36, 80)$ s vektorem hodnot účelových funkcí $\mathbf{z}^{\text{opt}} = (58800, 5360, -420)$.

2. Princip minimaxu

Úloha (7.19) bude mít v našem příkladě následující podobu:

maximalizovat

D

za podmínek

$$\frac{200x_1 + 300x_2 + 600x_3}{58800} \geq D,$$

$$\frac{30x_1 + 60x_2 + 40x_3}{6000} \geq D,$$

$$2 - \frac{2x_1 + 5x_2 + 3x_3}{340} \geq D,$$

+ podmínek (7.24).

V prvních dvou omezujících podmínkách bude mít levá strana hodnotu 1 pro ideální řešení dané účelové funkce, pro ostatní řešení bude mít hodnotu nižší než 1 a bude tak vlastně vyjadřovat na kolik procent se přibližujeme ideálu. Třetí omezující podmínka je pro ideální řešení rovněž rovna hodnotě 1 ($2 - 1 = 1$). Pro ostatní řešení je zlomek na levé straně větší než 1 a tedy rozdíl ($2 -$ hodnota zlomku) udává, jak se přibližujeme ideálu. Optimální řešení uvedené úlohy a tedy i kompromisní řešení úlohy VLP vyjádříme vektorem proměnných i hodnot účelových funkcí: $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (59,81; 20,16; 54,94)$, $\mathbf{z}^{\text{opt}} = (50975,5; 5201,6; -385,2)$. Optimální hodnota $D = 0,866$. To znamená, že největší odchylka od ideálu je 13,4%.

3. Minimalizace vzdáleností od ideálních hodnot

Při použití tohoto principu budeme za podmínek (7.24) minimalizovat účelovou funkci (7.20), která bude mít v našem případě tvar:

$$z = 0,3(58800 - 200x_1 - 300x_2 - 600x_3)/58800 + \\ + 0,6(6000 - 30x_1 - 60x_2 - 40x_3)/6000 + 0,1(-340 + 2x_1 + 5x_2 + 3x_3)/340.$$

Řešením této úlohy získáme kompromisní řešení $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (0; 36; 80)$ s hodnotami účelových funkcí $\mathbf{z}^{\text{opt}} = (58800; 5360; -420)$.

4. Cílové programování

Řekněme, že uživatel stanovil pro všechna kritéria následující cílové hodnoty pro tržbu ($g_1 = 56\,000$ Kč), využití práce zdravotně postižených dělníků ($g_2 = 5\,400$ minut) a vliv na životní prostředí ($g_3 = 400$ bodů). U prvních dvou funkcí budeme zřejmě minimalizovat záporné odchylky od cílových hodnot, u poslední z nich naopak kladnou odchylku. Celý model

cílového programování, který bude minimalizovat vážený součet nežádoucích odchylek, bude mít tedy následující podobu:

minimalizovat

$$z = 0,3d_1^- / 54000 + 0,6d_2^- / 5400 + 0,1d_3^+ / 400$$

za podmínek

$$200x_1 + 300x_2 + 600x_3 + d_1^- - d_1^+ = 54000,$$

$$30x_1 + 60x_2 + 40x_3 + d_2^- - d_2^+ = 5400,$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + d_3^- - d_3^+ = 400,$$

$$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 500$$

$$2x_1 + 0x_2 + 5x_3 \leq 400$$

$$100x_1 + 200x_2 + 200x_3 \geq 20000$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3,$$

$$d_i^-, d_i^+ \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

Uvedená úloha poskytuje kompromisní řešení s $\mathbf{x}^{\text{opt}} = (12; 40; 66)$ s hodnotami účelových funkcí $\mathbf{z}^{\text{opt}} = (54000; 5400; -422)$. Z toho je patrné, že první dvě cílové hodnoty byly splněny přesně, bodová hodnota pro vliv na životní prostředí byla překročena o 22 bodů.

7.3Cvičení

1. V systému *LINGO* vytvořte obecný model (n hodnocených jednotek, m vstupů a r výstupů) pro DEA BCC model orientovaný na vstupy ve formulaci (7.8) na str.224. Pomocí vytvořeného modelu vyhodnoťte efektivnost souboru dvanácti bankovních poboček, z nichž každá je charakterizována dvěma vstupy (počet pracovníků, provozní náklady v mil. Kč za rok) a dvěma výstupy (počet transakcí v tisících, objem prostředků na účtech v mil. Kč). Konkrétní údaje jsou v níže uvedené tabulce. Vypočtěte:

- a) míru efektivnosti všech hodnocených poboček,
- b) pro pobočky, které nejsou BCC efektivní, určete, jak by měly změnit svoje charakteristiky tak, aby dosáhly efektivní hranice,
- c) pro pobočky, které jsou BCC efektivní, vypočtěte míru super-efektivnosti modelem (7.13).

Pobočka	Počet prac.	Prov. nákl.	Počet trans.	Objem prostr.
1	37	56,8	1482	17472
2	24	32,9	1162	7930
3	26	37,8	1667	13100
4	15	27,0	1097	5437
5	21	30,3	1421	5045
6	34	22,0	2201	8232
7	25	19,9	1126	9399
8	23	24,7	1305	4322
9	38	24,0	2352	9832
10	18	25,1	1250	5336
11	19	31,8	1050	8315
12	25	35,4	1181	10160

2. Vyhodnořte efektivnost bankovních poboček z předcházejícího příkladu BCC modelem orientovaným na výstupy. Porovnejte získané výsledky.
3. Uvažujte následující úlohu vícekriteriálního lineárního programování: „maximalizovat“

$$z_1 = x_1 + 3x_2$$

$$z_2 = 2x_1 + x_2$$

za podmínek

$$5x_1 + 5x_2 \leq 25,$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 16,$$

$$x_1 \leq 4,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

- a) Jakýmkoliv programovým systémem vypočtete dílčí optimální řešení (optimální řešení získané samostatnou optimalizací každé z účelových funkcí).
- b) Určete kompromisní řešení podle principu agregace účelových funkcí, principu minimaxu a minimalizace vzdálenosti od ideálních hodnot – váhy obou účelových funkcí uvažujte 0,5.
4. Uvažujte následující úlohu vícekriteriálního lineárního programování: „maximalizovat“

$$z_1 = 2x_2$$

$$z_2 = 2x_1 - x_2$$

za podmínek

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &\leq 18, \\x_1 + 2x_2 &\leq 12, \\-x_1 + x_2 &\leq 3, \\x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

- a) Jakýmkoliv programovým systémem vypočtete dílčí optimální řešení.
 - b) Určete kompromisní řešení podle principu agregace účelových funkcí, principu minimaxu a minimalizace vzdálenosti od ideálních hodnot – váha první funkce je 0,4 a druhé 0,6.
5. V příkladu 7.3 na str. 236 se změnil cílové hodnoty jednotlivých kritérií následovně: $g_1 = 57\,200$ Kč, $g_2 = 5\,600$ minut a $g_3 = 380$ bodů. Váhy všech tří kritérií jsou určeny vektorem $\mathbf{v} = (0,5; 0,3; 0,2)$. U prvního kritéria je třeba minimalizovat zápornou odchylku, u druhého součet záporné i kladné odchylky (chceme dosáhnout pokud možno přesného splnění cílové hodnoty), u třetího cíle kladnou odchylku. Sestavte model cílového programování a vypočtete kompromisní řešení.