Pokročilé matematické modely a metody

Jan Fábry

ŠKODA AUTO Vysoká škola
Katedra logistiky, kvality a automobilové techniky

fabry@savs.cz
http://nb.vse.cz/~fabry

Leden 2017, Mladá Boleslav

Obsah

Obsah

Úloha celočíselného programování

Obecná úloha lineárního programování (LP):

$$z_{\text{LP}} = \max\{c^T x : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n_+\}. \tag{1}$$

Úloha celočíselného programování (IP):

$$z_{\text{IP}} = \max\{c^T x : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n_+\}. \tag{2}$$

$z_{\text{LP}} \geq z_{\text{IP}}$ neboť $\mathbb{Z}^n_+ \subset \mathbb{R}^n_+$
$P = \{x : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n_+\}, S = \{x : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n_+\}, S \subset P$

Úloha smíšeně-celočíselného programování (MIP):

$$z_{\text{MIP}} = \max\{c^T x + h^T y : Ax + Gy \leq b, x \in \mathbb{R}^n_+, y \in \mathbb{Z}^p_+\}. \tag{3}$$

Úloha bivalentního programování (BIP):

$$z_{\text{BIP}} = \max\{c^T x : Ax \leq b, x \in \mathbb{B}^n\}, \mathbb{B} = \{0, 1\}. \tag{4}$$

Obsah

Modelování základních úloh IP a MIP

1. Úloha výrobního plánování

Proměnné: x_i je počet kusů i-tého typu produktu

Omezující podmínky: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - celé

2. Řezná úloha

Proměnné: x_i je počet kusů původního materiálu rozděleného podle i-tého řezného schématu

Omezující podmínky: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - celé

Účelová funkce:

- minimalizace počtu rozřezaných kusů původního materiálu
- minimalizace odpadu
- maximalizace počtu výrobků sestavených z nařezaných dílů (maximalizace zisku)

3. (0-1) Úloha batohu

Formulace: Je dán rozpočet b pro investice do n uvažovaných projektů, kde a_j je hodnota nákladů na projekt j a c_j je jeho očekávaný výnos. Cílem je vybrat takový soubor projektů, který maximalizuje celkový očekávaný výnos a nepřekročí daný rozpočet.

Proměnné:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{je-li projekt } j \text{ vybrán} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{5}$$

Model:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \tag{7}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

4. Úloha perfektního párování

Formulace: Na školním výletě má být n (sudé číslo) studentů rozřazeno do dvoulůžkových pokojů. Pro potenciální spolubydlící i a j je dán index spokojenosti c_{ij}. Cílem je umístit studenty do pokojů tak, abychom maximalizovali celkovou spokojenost třídy.

Proměnné:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže studenti } i \text{ a } j \text{ jsou spolubydlící} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad i < j \tag{9}$$

Model:

$$\max \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{10}$$

$$\sum_{j<i} x_{ji} + \sum_{j>i} x_{ij} = 1 \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{pro } \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ j = i+1, i+2, \ldots, n \end{array} \tag{12}$$

5. Zobecněný přiřazovací problém

Formulace: Uvažujme m čerpacích stanic odebírajících naftu z n terminálů. Každá stanice i může odebírat naftu pouze z jednoho terminálu, její požadavek je a_i. Kapacita terminálu j je b_j. Pokud stanice i odebírá naftu z terminálu j, jsou účtovány fixní náklady c_{ij}. Cílem je minimalizovat celkové náklady.

Proměnné:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže stanice } i \text{ odebírá naftu z terminálu } j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{13}$$

5. Zobecněný přiřazovací problém

Model:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} \leq b_j \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, n \tag{16}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{pro } \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{17}$$

6. Lineární přiřazovací problém

Formulace: K dispozici máme n pracovníků schopných provést n úkolů. Každý pracovník má vykonávat právě jeden úkol. Realizace j-tého úkolu i-tým pracovníkem je ohodnocena náklady c_{ij}. Cílem je rozdělit mezi pracovníky všechny úkoly s minimální výší celkových nákladů.

Variables:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže pracovník } i \text{ vykonává úkol } j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{18}$$

6. Lineární přiřazovací problém

Model:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{19}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, n \tag{21}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{pro } \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix} \tag{22}$$

7. Úzkoprofilový přiřazovací problém

Formulace: Je dáno n úkolů a n paralelních strojů k jejich realizaci. Koeficient c_{ij} představuje dobu nutnou pro dokončení úkolu i strojem j. Cílem je minimalizovat dobu, za kterou budou úkoly dokončeny (všechny stroje začnou na úkolech pracovat současně).

Proměnné:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže úkol } i \text{ je přiřazen na stroj } j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{23}$$

$$T = \text{čas dokončení posledního úkolu} \tag{24}$$

7. Úzkoprofilový přiřazovací problém

Model:

$$\min \ T \tag{25}$$

$$c_{ij} x_{ij} \leq T \quad \text{pro} \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, n \tag{28}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{pro} \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{29}$$

8. Kvadratický přiřazovací problém

Formulace: Množina n zařízení má být umístěna na n pracovišť (na každém pracovišti bude právě jedno zařízení). Koeficient c_{ij} představuje hodnotu toku produktů od zařízení i k zařízení j a d_{kl} je vzdálenost mezi pracovišti k a l. Cílem je rozmístit zařízení na pracoviště s minimálními náklady.

Variables:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{je-li zařízení } i \text{ umístěno na pracoviště } k \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{30}$$

8. Kvadratický přiřazovací problém

Model:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ij} d_{kl} x_{ik} x_{jl} \tag{31}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = 1 \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n \tag{32}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1 \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots, n \tag{33}$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\} \quad \text{pro } \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{34}$$

8. Kvadratický přiřazovací problém

Linearizace účelové funkce:

$$y_{ijkl} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže zařízení } i \text{ je umístěno na pracoviště } k \\ & \text{a zařízení } j \text{ je umístěno na pracoviště } l \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{35}$$

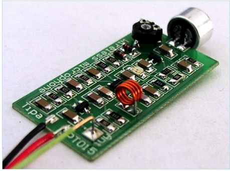
$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ij}\, d_{kl}\, y_{ijkl} \tag{36}$$

$$y_{ijkl} \geq x_{ik} + x_{jl} - 1 \quad \text{pro } i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n \tag{37}$$

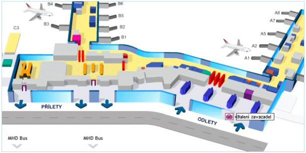
8. Kvadratický přiřazovací problém

Aplikace:

- Letovací problém



- Přiřazení letadel k odletovým branám



9. Pokrytí, dělení a rozklad množiny

Formulace: Nechť $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ je konečná množina úkolů a $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ konečná množina firem zajišťujících tyto úkoly. Je dána matice A s hodnotami $a_{ij} = 1$, jestliže firma j je schopna řešit úkol i, $a_{ij} = 0$ jinak. Jestliže j-tá firma bude vybrána, bude si účtovat náklady c_j. Cílem je pokrýt všechny úkoly s minimálními celkovými náklady.

Nechť $M_j \subseteq M$ je množina úkolů, které je firma $j \in N$ schopna řešit.

Říkáme, že

- $F \subseteq N$ je pokrytím M, jestliže $\cup_{j \in F} M_j = M$
- $F \subseteq N$ je dělením M, jestliže $M_j \cap M_k = \emptyset$ pro všechna $j, k \in F, j \neq k$
- $F \subseteq N$ je rozkladem M, jestliže F je pokrytím a dělením M

9. Pokrytí, dělení a rozklad množiny

Proměnné:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{jestliže firma } j \text{ je vybrána, tj. } j \in F \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{38}$$

Model:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{39}$$

$$\begin{aligned} &\text{(pokrytí)} && \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 && \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \\ &\text{(dělení)} && \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 && \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \\ &\text{(rozklad)} && \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 && \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned} \tag{40}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, n \tag{41}$$

9. Pokrytí, dělení a rozklad množiny

Aplikace:

- Nechť $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ je množina potenciálních lokalit pro umístění hasičských stanic. Náklady na umístění stanice v lokalitě j jsou c_j. Nechť $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ je množina oblastí, které mají být zajištěny. Množina M_j obsahuje oblasti, které je možné zajistit z lokality j (např. jsou dosažitelné ze stanice v rámci 10 minut).
- Přiřazení posádek letům.
- Rozvržení pracovníků na směny.

10. Úloha optimálního rozmístění zařízení

Formulace: Je dána množina $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ lokalit pro umístění zařízení a množina zákazníků $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Nechť a_i je kapacita zařízení v lokalitě i a b_j je velikost poptávky j-tého zákazníka. Za využití lokality i se účtují fixní náklady f_i. Přeprava jedné jednotky z lokality i k zákazníkovi j stojí c_{ij}. Cílem je rozhodnout, kam umístit zařízení a jaké množství přepravit mezi jednotlivými lokalitami a zákazníky tak, aby celkové náklady byly minimální.

Proměnné:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{jestliže zařízení bude umístěno v lokalitě } i \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{42}$$

$$y_{ij} = \text{množství přepravené z lokality } i \text{ k zákazníkovi } j \tag{43}$$

10. Úloha optimálního rozmístění zařízení

Model:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i x_i \tag{44}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \leq a_i x_i \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \tag{45}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} = b_j \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, n \tag{46}$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \tag{47}$$

$$y_{ij} \in \mathbb{R}_+ \quad \text{pro } \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{48}$$

11. Úloha výrobního plánování s fixními náklady

Formulace: Lze vyrábět n produktů na n výrobních linkách (každý produkt na jedné VL). Pokud je VL i využita (tj. vyrábí se produkt i), účtují se fixní náklady f_i. Jednotkový zisk z produktu i je c_i. Jsou definované standardní (kapacitní) omezující podmínky úlohy výrobního plánování. Cílem je maximalizovat celkový zisk z produkce snížený o fixní náklady.

Proměnné:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{jestliže se produkt } i \text{ vyrábí (na VL } i\text{)} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{49}$$

$$y_i = \text{objem výroby produktu } i \tag{50}$$

11. Úloha výrobního plánování s fixními náklady

Model:

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i y_i - \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \tag{51}$$

$$\text{(kapacitní omezení)} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{li} y_i \leq b_l \quad \text{pro } l = 1, 2, \ldots, m \tag{52}$$

$$y_i \leq M x_i \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n \tag{53}$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n \tag{54}$$

$$y_i \in \mathbb{R}_+ \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n \tag{55}$$

M = vysoká konstanta

12. Kontejnerový dopravní problém

Formulace: Homogenní zboží je přepravováno přímo od m dodavatelů k n odběratelům. Nechť a_i je kapacita dodavatele i a b_j je požadavek odběratele j. Pro přepravu jsou použity kontejnery o kapacitě K; za přepravu jednoho kontejneru mezi dodavatelem i a odběratelem j se účtují náklady c_{ij}. Cílem je uspokojit požadavky všech odběratelů s minimálními přepravními náklady.

Proměnné:

$$y_{ij} = \text{objem přepravy od dodavatele } i \text{ k odběrateli } j \tag{56}$$

$$x_{ij} = \text{počet kontejnerů použitých pro přepravu zboží od dodavatele } i \text{ k odběrateli } j \tag{57}$$

12. Kontejnerový dopravní problém

Model:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{58}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \leq a_i \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \tag{59}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} = b_j \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, n \tag{60}$$

$$y_{ij} \leq K x_{ij} \quad \text{pro } \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{61}$$

$$y_{ij} \in \mathbb{R}_+ \quad \text{pro } \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{62}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{pro } \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{63}$$

13. Rozšířená úloha batohu

Formulace 1: Je dána množina n předmětů, které mohou být umístěny do m kontejnerů. Je dána hmotnost předmětu j, kterou označíme w_j a jeho hodnota c_j. Kontejner i má nosnost K_i. Cílem je maximalizovat celkovou hodnotu všech vybraných položek.

Proměnné:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže předmět } j \text{ je umístěn do kontejneru } i \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{64}$$

13. Rozšířená úloha batohu

Model:

$$\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_j x_{ij} \tag{65}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, n \tag{66}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \leq K_i \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \tag{67}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{pro } \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{68}$$

13. Rozšířená úloha batohu

Formulace 2: Je dána množina n typů předmětů, které mají být převezeny s využitím m kontejnerů s identickou nosností K. Pro typ předmětu j je dána jeho hmotnost w_j a počet r_j, který má být převezen. Cílem je minimalizovat počet použitých kontejnerů k přepravě všech předmětů.

Proměnné:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{je-li kontejner } i \text{ použitý} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{69}$$

$$y_{ij} = \begin{array}{l} \text{počet položek typu } j \\ \text{umístěných v kontejneru } i \end{array} \tag{70}$$

13. Rozšířená úloha batohu

Model:

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_i \tag{71}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} = r_j \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, n \tag{72}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j y_{ij} \leq K x_i \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \tag{73}$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \tag{74}$$

$$y_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{pro } \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{75}$$

Obsah

Úvod to teorie grafů

Graf je množina $G = \{V, E\}$, kde V je množina uzlů (vrcholů) a E množina hran.
Neorientovaná hrana je množina dvou uzlů $\{i, j\}$.
Orientovaná hrana je uspořádaná dvojice uzlů (i, j).
V neorientovaném grafu jsou všechny hrany neorientované.
V orientovaném grafu (digrafu) jsou všechny hrany orientované.
Smíšený graf obsahuje neorientované i orientované hrany.
Dva uzly spojené hranou se nazývají sousední.
Dvě hrany se společným uzlem se nazývají sousední.
Hrana a vrchol obsažený v této hraně se nazývají incidentní.
Stupeň uzlu (v neorientovaném grafu) je počet hran s ním incidentních.
Vstupní polostupeň uzlu (v orientovaném grafu) je počet incidentních hran, v nichž je tento uzel koncovým uzlem.

Úvod to teorie grafů

Výstupní polostupeň uzlu (v orientovaném grafu) je počet incidentních hran, v nichž je tento uzel počátečním uzlem.

Sled z uzlu i do uzlu j je posloupnost uzlů a hran, která začíná v uzlu i a končí v uzlu j (uzly a hrany se mohou opakovat).

Tah je sled, v němž se neopakují žádné hrany.

Cesta je tah, v němž se neopakují žádné uzly.

Cyklus je uzavřený sled (začíná a končí ve stejném uzlu).

V orientované cestě (v orientovaném grafu) je respektována orientace všech hran.

V neorientované cestě (v orientovaném grafu) nemusí být orientace hran respektována.

Neorientovaný graf je souvislý, jestliže mezi každými dvěma uzly existuje cesta.

Orientovaný graf je souvislý, jestliže mezi každými dvěma uzly existuje orientovaná nebo neorientovaná cesta.

Úvod to teorie grafů

Orientovaný graf je silně souvislý, jestliže mezi každými dvěma uzly existuje orientovaná cesta.

Neorientovaný graf je úplný, jestliže mezi každým dvěma uzly existuje hrana.

Strom je souvislý neorientovaný graf, v němž neexistuje cyklus.

Podgraf grafu $G = \{V, E\}$ je graf $G' = \{V', E'\}$, kde $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$.

Kostra grafu G je podgraf G', kde $V' = V$, a který je stromem.

V ohodnoceném grafu jsou uzlům a/nebo hranám přiřazena čísla.

Hamiltonův cyklus v grafu je cyklus, který obsahuje každý uzel grafu právě jednou.

Eulerův cyklus v grafu obsahuje každou jeho hranu právě jednou.

Eulerův tah v grafu je tah, který obsahuje každou jeho hranu.

Eulerovský graf je graf, v němž existuje Eulerův cyklus.

Obsah

Tokové úlohy

1. Úloha hledání maximálního toku

Formulace: Nechť $G = \{V, E\}$ je digraf, v němž je pro každou hranu (i, j) definována její kapacita k_{ij}. Cílem je nalézt maximální hodnotu toku mezi zdrojem s a místem určení (stokem) d.

Proměnné:

$$x_{ij} = \text{hodnota toku z uzlu } i \text{ do uzlu } j \tag{76}$$

$$F = \text{hodnota celkového toku} \tag{77}$$

Model:

$$\max F \tag{78}$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ (i,j) \in E}} x_{ij} - \sum_{\substack{j \in V \\ (j,i) \in E}} x_{ji} = \begin{cases} F & \text{pro } i = s \\ 0 & \text{pro } i \in V \setminus \{s, d\} \\ -F & \text{pro } i = d \end{cases} \tag{79}$$

$$x_{ij} \leq k_{ij} \quad \text{pro } (i, j) \in E \tag{80}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{R}_+ \quad \text{pro } (i, j) \in E \tag{81}$$

$$F \in \mathbb{R}_+ \tag{82}$$

1. Úloha hledání maximálního toku

Alternativní model: Přidáme fiktivní orientovanou hranu ze stoku d do zdroje s, která má kapacitu $k_{ds} = M$ (vysoká konstanta).

Proměnné:

$$x_{ij} = \text{hodnota toku z uzlu } i \text{ do uzlu } j \tag{83}$$

Model:

$$\max\ x_{ds} \tag{84}$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ (i,j) \in E}} x_{ij} - \sum_{\substack{j \in V \\ (j,i) \in E}} x_{ji} = 0 \quad \text{pro } i \in V \tag{85}$$

$$x_{ij} \leq k_{ij} \quad \text{pro } (i,j) \in E \tag{86}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{R}_+ \quad \text{pro } (i,j) \in E \tag{87}$$

2. Úloha hledání toku s minimálními náklady

Formulace: Nechť $G = \{V, E\}$ je digraf, v němž pro každou hranu (i, j) je definována její kapacita k_{ij} a jednotkové náklady c_{ij}. Cílem je splnit požadovanou hodnotu celkového toku F_0 (ze zdroje s do stoku d) s minimálními celkovými náklady.

Proměnné:
$$x_{ij} = \text{hodnota toku z uzlu } i \text{ do uzlu } j \tag{88}$$

Model:
$$\min \sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ (i,j) \in E}} c_{ij} x_{ij} \tag{89}$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ (i,j) \in E}} x_{ij} - \sum_{\substack{j \in V \\ (j,i) \in E}} x_{ji} = \begin{cases} F_0 & \text{pro } i = s \\ 0 & \text{pro } i \in V \setminus \{s, d\} \\ -F_0 & \text{pro } i = d \end{cases} \tag{90}$$

$$x_{ij} \leq k_{ij} \quad \text{pro } (i, j) \in E \tag{91}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{R}_+ \quad \text{pro } (i, j) \in E \tag{92}$$

3. Úloha hledání maximálního toku s limitovanými náklady

Formulace: Nechť $G = \{V, E\}$ je digraf, v němž pro každou hranu (i, j) je definována její kapacita k_{ij} a jednotkové náklady c_{ij}. Cílem je nalézt maximální hodnotu toku mezi zdrojem s a místem určení (stokem) d při respektování omezených celkových nákladů C_0.

Proměnné:

$$x_{ij} = \text{hodnota toku z uzlu } i \text{ do uzlu } j \tag{93}$$

$$F = \text{hodnota celkového toku} \tag{94}$$

Model:

$$\max\ F \tag{95}$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ (i,j) \in E}} c_{ij} x_{ij} \leq C_0 \tag{96}$$

a omezující podmínky (79) - (82)

4. Úloha hledání toku s minimálními fixními náklady

Formulace: Nechť $G = \{V, E\}$ je digraf, v němž je pro každou hranu (i, j) definována její kapacita k_{ij}. Za využití hrany (i, j) je účtována částka c_{ij}. Cílem je splnit požadovanou hodnotu celkového toku F_0 (ze zdroje s do stoku d) s minimálními celkovými fixními náklady.

Proměnné:

$$x_{ij} = \text{hodnota toku z uzlu } i \text{ do uzlu } j \tag{97}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li hrana } (i, j) \text{ využita} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{98}$$

4. Úloha hledání toku s minimálními fixními náklady

Model:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ (i,j) \in E}} c_{ij} y_{ij} \tag{99}$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ (i,j) \in E}} x_{ij} - \sum_{\substack{j \in V \\ (j,i) \in E}} x_{ji} = \begin{cases} F_0 & \text{pro } i = s \\ 0 & \text{pro } i \in V \setminus \{s, d\} \\ -F_0 & \text{pro } i = d \end{cases} \tag{100}$$

$$x_{ij} \leq k_{ij} y_{ij} \quad \text{pro } (i,j) \in E \tag{101}$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{pro } (i,j) \in E \tag{102}$$

5. Víceproduktová toková úloha

Formulace: Nechť $G = \{V, E\}$ je digraf a Q je množina produktů, které mají být dopraveny ze zdroje s do stoku d. Pro každý produkt $q \in Q$ je zadáno požadované množství F_0^q. Celková hodnota toku všech produktů hranou (i, j) nesmí překročit její kapacitu k_{ij}. Tok jedné jednotky produktu q hranou (i, j) je ohodnocen náklady c_{ij}^q. Cílem je přepravit požadovaná množství všech produktů s minimálními celkovými náklady.

Proměnné:

$$x_{ij}^q = \begin{array}{l}\text{množství produktu } q \text{ přepravené}\\ \text{z uzlu } i \text{ do uzlu } j\end{array} \tag{103}$$

5. Víceproduktová toková úloha

Model:

$$\min \sum_{q \in Q} \sum_{\substack{i \in V \\ (i,j) \in E}} \sum_{j \in V} c_{ij}^q x_{ij}^q \tag{104}$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ (i,j) \in E}} x_{ij}^q - \sum_{\substack{j \in V \\ (j,i) \in E}} x_{ji}^q = \begin{cases} F_0^q & \text{pro } i = s,\, q \in Q \\ 0 & \text{pro } i \in V \setminus \{s, d\},\, q \in Q \\ -F_0^q & \text{pro } i = d,\, q \in Q \end{cases} \tag{105}$$

$$\sum_{q \in Q} x_{ij}^q \le k_{ij} \quad \text{pro } (i,j) \in E \tag{106}$$

$$x_{ij}^q \in \mathbb{R}_+ \quad \text{pro } (i,j) \in E,\, q \in Q \tag{107}$$

6. Přepravní úloha (Transshipment Problem)

Formulace: Nechť $G = \{V, E\}$ je digraf se třemi množinami uzlů: množina zdrojů V_s, množina cílových uzlů V_d a množina průběžných uzlů V_t. Nechť $a_i > 0$ je velikost nabídky homogenního produktu ve zdroji $i \in V_s$ a $a_i < 0$ je velikost poptávky po produktu v cílovém uzlu $i \in V_d$. Pro průběžný uzel $i \in V_t$ platí $a_i = 0$. Pro každou hranu (i, j) je definována její kapacita k_{ij} a jednotkové náklady c_{ij}. Poptávka ve všech cílových uzlech musí být uspokojena, aniž by došlo v některém zdroji k překročení jeho nabídky. Cílem je minimalizovat celkové náklady. Předpokládejme, že velikost celkové poptávky je rovna velikosti celkové nabídky.

Předpoklady:

$$V = V_s \cup V_d \cup V_t \quad \text{a} \quad V_s \cap V_d \cap V_t = \emptyset \tag{108}$$

$$\sum_{i \in V_s} a_i + \sum_{i \in V_d} a_i = 0 \tag{109}$$

6. Přepravní úloha (Transshipment Problem)

Proměnné:

$$x_{ij} = \text{hodnota toku z uzlu } i \text{ do uzlu } j \tag{110}$$

Model:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ (i,j) \in E}} c_{ij} x_{ij} \tag{111}$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ (i,j) \in E}} x_{ij} - \sum_{\substack{j \in V \\ (j,i) \in E}} x_{ji} = a_i \quad \text{pro } i \in V \tag{112}$$

$$x_{ij} \leq k_{ij} \quad \text{pro } (i,j) \in E \tag{113}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{R}_+ \quad \text{pro } (i,j) \in E \tag{114}$$

7. Minimální kostra grafu

Formulace: Nechť $G = \{V, E\}$ je neorientovaný graf, v němž jsou pro každou hranu $\{i, j\}$ definovány náklady c_{ij}. Cílem je najít kostru grafu G s minimálními celkovými náklady odpovídajícími součtu nákladů vybraných hran.

Úprava grafu: Množina neorientovaných hran E je převedena na množinu orientovaných hran A takto:

Každá hrana $\{i, j\} \in E$ je nahrazena dvojicí orientovaných hran $(i, j) \in A$ a $(j, i) \in A$, $c_{ji} = c_{ij}$.

Proměnné:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li hrana } (i, j) \text{ vybrána} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{115}$$

$$y_{ij} = \text{hodnota toku z uzlu } i \text{ do uzlu } j \tag{116}$$

7. Minimální kostra grafu

Model:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ (i,j) \in A}} c_{ij} x_{ij} \tag{117}$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ (1,j) \in A}} x_{1j} = 0 \tag{118}$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ (i,j) \in A}} x_{ij} = 1 \quad \text{pro } i \in V \setminus \{1\} \tag{119}$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ (i,j) \in A}} y_{ij} - \sum_{\substack{j \in V \\ (j,i) \in A}} y_{ji} = 1 \quad \text{pro } i \in V \setminus \{1\} \tag{120}$$

$$0 \le y_{ij} \le (|V| - 1) x_{ij} \quad \text{pro } (i,j) \in A \tag{121}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{pro } (i,j) \in A \tag{122}$$

8. Minimální Steinerův strom

Formulace: Nechť $G = \{V, E\}$ je digraf, $s \in V$ je zdroj signálu (vysílač), $D \subset V$ je množina uživatelů (přijímačů, cílových míst) a $T \subset V$ je množina pomocných stanic (ústředen), přes které může být signál přenášen. Uživatelé mohou být připojeni na vysílač buď přímo nebo přes ústředny. Hodnota c_{ij} představuje náklady na spojení $(i, j) \in E$. Za použití ústředny $i \in T$ je účtována fixní částka f_i. Cílem je spojit všechny uživatele s vysílačem s minimálními celkovými náklady.

Proměnné:

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{je-li uzel } i \text{ zařazen do stromu} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{123}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li hrana } (i, j) \text{ zařazena do stromu} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{124}$$

$$y_{ij} = \text{hodnota toku z uzlu } i \text{ do uzlu } j \tag{125}$$

8. Minimální Steinerův strom

Model:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ (i,j) \in E}} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in T} f_i z_i \tag{126}$$

$$z_i = 1 \quad \text{pro } i \in D \tag{127}$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ (i,j) \in E}} x_{ij} = z_i \quad \text{pro } i \in V \setminus \{s\} \tag{128}$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ (i,j) \in E}} y_{ij} - \sum_{\substack{j \in V \\ (j,i) \in E}} y_{ji} = z_i \quad \text{pro } i \in V \setminus \{s\} \tag{129}$$

$$0 \leq y_{ij} \leq (|V| - 1) x_{ij} \quad \text{pro } (i,j) \in E \tag{130}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{pro } (i,j) \in E \tag{131}$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad \text{pro } i \in T \tag{132}$$

Obsah

Okružní a rozvozní úlohy

Klasifikace úloh

- Typ trasy v grafu
  - Trasy jsou tvořeny uzly
    - Úloha obchodního cestujícího (TSP) - nekonečně velká kapacita vozidel
    - Rozvozní úloha (VRP) - omezená kapacita vozidel
  - Trasy jsou tvořeny hranami
    - Úloha čínského listonoše (CPP)
- Počet dep a vozidel
  - Jedno depo (výchozí místo) s jedním nebo několika vozidly
  - Více dep
- Znalost zákazníků
  - Statické úlohy - všichni zákazníci jsou známí předem
  - Dynamické úlohy - zákazníci známí předem a zákazníci s on-line požadavky
- Cíl
  - Minimalizace celkové délky tras (celkových nákladů)
  - Minimalizace celkové doby jízdy všech vozidel
  - Minimalizace nejdelší doby jízdy ze všech vozidel

1. Úloha obchodního cestujícího

Formulace: Nechť $G = \{U, E\}$ je úplný digraf se vzdáleností c_{ij} definovanou pro každou hranu (i, j) (matice C je obecně nesymetrická). Nechť uzel 1 je depo a $|U| = n$. Cílem je určit minimální Hamiltonův cyklus.

Proměnné:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže vozidlo jede přímo} \\ & \text{z uzlu } i \text{ do uzlu } j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{133}$$

$$u_i = \text{umělá proměnná zavedená v podmínkách zabraňujících vytváření parciálních cyklů} \tag{134}$$

1. Úloha obchodního cestujícího

Model (Miller, Tucker, Zemlin):

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{135}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n \tag{136}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, n \tag{137}$$

$$u_i + 1 - (n-1)(1 - x_{ij}) \leq u_j \quad \text{pro } \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \end{array} \tag{138}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{pro } \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{139}$$

$$u_i \in \mathbb{R}_+ \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n \tag{140}$$

2. Úloha obchodního cestujícího s časovými okny (TSPTW)
Formulace: Nechť je definována nesymetrická úloha TSP. Každý uzel i musí být navštíven v rámci časového intervalu $\langle e_i, l_i \rangle$. Vozidlo stráví v uzlu i daný čas S_i. Hodnota d_{ij} představuje dobu přejezdu mezi uzly i a j. Cílem je určit minimální Hamiltonův cyklus (z hlediska vzdálenosti) při respektování všech časových oken.
Proměnné:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže vozidlo jede přímo} \\ & \text{z uzlu } i \text{ do uzlu } j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{141}$$

$$t_i = \text{čas příjezdu vozidla do uzlu } i \tag{142}$$

2. Úloha obchodního cestujícího s časovými okny (TSPTW)
Úprava modelu MTZ:

$$e_i \leq t_i \leq l_i \quad \text{pro } i = 2, 3, \ldots, n \tag{143}$$

$$t_1 = 0 \tag{144}$$

$$t_i \in \mathbb{R}_+ \quad \text{pro } i = 2, 3, \ldots, n \tag{145}$$

Proměnné u_i jsou eliminovány a omezující podmínky (138) jsou nahrazeny podmínkami

$$t_i + S_i + d_{ij} - M(1 - x_{ij}) \leq t_j \quad \text{pro } \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \end{array} \; i \neq j \tag{146}$$

3. Metrická úloha obchodního cestujícího (Δ - TSP)

Trojúhelníkové nerovnosti:

$$c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj} \quad \text{pro } i, j, k = 1, 2, \ldots, n, i \neq j \neq k \tag{147}$$

4. Euklidovská úloha obchodního cestujícího

Euklidovské vzdálenosti:

$$c_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2} \quad \text{pro } i, j = 1, 2, \ldots, n, i \neq j \tag{148}$$

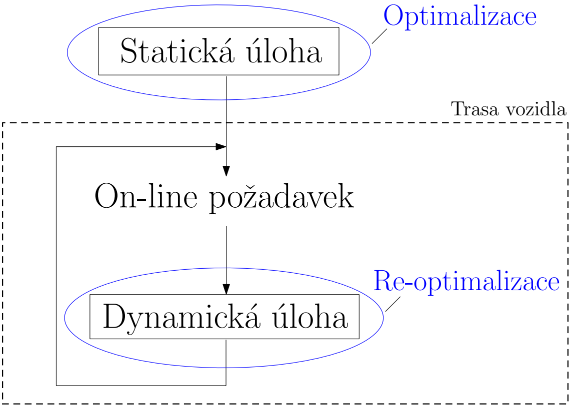
5. Otevřená úloha obchodního cestujícího

Namísto minimálního Hamiltonova cyklu se hledá minimální otevřená cesta vedoucí přes všechny uzly (trasa není zakončena v depu):

$$\text{nastavíme } c_{i1} = 0 \quad \text{pro } i = 2, 3, \ldots, n \tag{149}$$

6. Dynamická úloha obchodního cestujícího

Ve statické verzi TSP jsou všichni zákazníci známí předem.
V dynamické verzi se během realizace optimální trasy objevují on-line požadavky dalších zákazníků.



7. Rozvozní úloha

Formulace: Nechť $G = \{U, E\}$ je úplný digraf se vzdáleností c_{ij} definovanou pro každou hranu (i, j). Nechť uzel 1 je depo, v němž je k dispozici vozidlo s kapacitou V, $|U| = n$. Každý zákazník i má požadavek o velikosti q_i. Cílem je uspokojit požadavky všech zákazníků a minimalizovat celkovou délku všech tras.

Proměnné:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže vozidlo jede přímo} \\ & \text{u uzlu } i \text{ do uzlu } j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{150}$$

$$u_i = \text{umělá proměnná zavedená pro bilanci nákladu vozidla} \tag{151}$$

Předpoklady:

$$\sum_{i=2}^{n} q_i > V \tag{152}$$

$$q_i \leq V \quad \text{pro } i = 2, 3, \ldots, n \tag{153}$$

7. Rozvozní úloha

Model:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{154}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{pro } i = 2, 3, \ldots, n \tag{155}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{pro } j = 2, 3, \ldots, n \tag{156}$$

$$u_i + q_j - V(1 - x_{ij}) \leq u_j \quad \text{pro } \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \end{array} \tag{157}$$

$$u_i \leq V \quad \text{pro } i = 2, 3, \ldots, n \tag{158}$$

$$u_1 = 0 \tag{159}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{pro } \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{160}$$

$$u_i \in \mathbb{R}_+ \quad \text{pro } i = 2, 3, \ldots, n \tag{161}$$

8. Rozvozní úloha s heterogenním vozovým parkem

Formulace: Nechť je definována úloha VRP s K typy vozidel, která jsou k dispozici v jednom depu. Pro každý typ k je dána kapacita vozidla V_k, počet vozidel p_k a nákladový koeficient d_k, odvozený od spotřeby vozidla. Cílem je uspokojit požadavky všech zákazníků a minimalizovat celkové náklady.

Proměnné:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{jestliže vozidlo typu } k \text{ jede přímo} \\ & \text{z uzlu } i \text{ do uzlu } j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{162}$$

$$u_i = \text{umělá proměnná zavedená pro bilanci nákladu vozidla} \tag{163}$$

Předpoklad:

$$\sum_{i=2}^{n} q_i \leq \sum_{k=1}^{K} p_k V_k \tag{164}$$

Značení:

$$\overline{V} = \max_{k=1,2,\ldots,K} V_k \tag{165}$$

8. Rozvozní úloha s heterogenním vozovým parkem

Model:

$$\min \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_k c_{ij} x_{ij}^k \tag{166}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^k = 1 \quad \text{pro } i = 2, 3, \ldots, n \tag{167}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^k = \sum_{i=1}^{n} x_{ji}^k \quad \text{pro } \begin{array}{l} j = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, K \end{array} \tag{168}$$

$$\sum_{j=2}^{n} x_{1j}^k \leq p_k \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots, K \tag{169}$$

$$u_i + q_j - \overline{V}(1 - x_{ij}^k) \leq u_j \quad \text{pro } \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, K \end{array} \tag{170}$$

8. Rozvozní úloha s heterogenním vozovým parkem

Model (pokrač.):

$$u_i \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} x_{ij}^k V_k \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n \tag{171}$$

$$u_1 = 0 \tag{172}$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad \text{pro } \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, K \end{array} \tag{173}$$

$$u_i \in \mathbb{R}_+ \quad \text{pro } i = 2, 3, \ldots, n \tag{174}$$

9. Rozvozní úloha s časovými okny (VRPTW)
Jestliže jsou v úloze definována časová okna, je zavedena proměnná t_i a všechny odpovídající omezující podmínky podobně jako v úloze TSPTW.

10. Rozvozní úloha s dělenou dodávkou (SDVRP)
Standardní model úlohy VRP nelze použít, pokud $\exists i, q_i > V$. Takový požadavek musí být rozdělen do více tras. I v případě, že $q_i \leq V, \forall i$, může být výhodné dělit dodávky. V modelu proměnná Q_i^k značí část požadavku q_i zahrnutou do trasy k:

$$\sum_{k=1}^{K} Q_i^k = q_i \quad \text{pro } i = 2, 3, \ldots, n \tag{175}$$

11. Přepravní problémy - úlohy vyzvednutí a doručení (PDP)

- One-to-One PDP
  (úloha přepravy hendikepovaných osob, úloha kurýrní služby)
  Každý požadavek je dán místem vyzvednutí a místem doručení. Trasy vozidel začínají a končí ve společném depu.
- Many-to-Many PDP
  Zboží může být vyzvednuto v jednom z několika míst a doručeno do jednoho z několika míst.
- One-to-Many-to-One PDP
  Každý zákazník obdrží zásilku z depa a zašle do něj jinou zásilku.

12. Neorientovaná úloha čínského listonoše

Formulace: Nechť $G = \{U, E\}$ je neorientovaný souvislý graf. Pro každou hranu $\{i, j\}$ jsou dány náklady c_{ij}. Cílem je najít cyklus s minimálními celkovými náklady takový, že v něm bude obsažena každá hrana alespoň jednou.

Věta: Neorientovaný graf G je eulerovský právě tehdy, když G je souvislý a všechny uzly mají sudý stupeň.

Pokud graf G není eulerovský, sestrojíme supergraf G^* grafu G takový, že G^* je eulerovský a obsahuje Eulerův cyklus, který je kratší než Eulerův cyklus v jakémkoli jiném supergrafu grafu G.

12. Neorientovaná úloha čínského listonoše

Proměnné v modelu I:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže hrana } \{i,j\} \text{ je zdvojena v } G^* \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad i < j \qquad (176)$$

$$y_i = \text{umělá proměnná pro vyjádření sudého/lichého čísla} \qquad (177)$$

Značení v modelu I:

$U_0 \subset U$ je množina uzlů sudého stupně
$U_1 \subset U$ je množina uzlů lichého stupně

12. Neorientovaná úloha čínského listonoše

Model I:

$$\min \sum_{\substack{\{i,j\}\in E\\ i<j}} c_{ij} x_{ij} \tag{178}$$

$$\sum_{\substack{\{j,i\}\in E\\ j<i}} x_{ji} + \sum_{\substack{\{i,j\}\in E\\ j>i}} x_{ij} = 2y_i \quad \text{pro } i \in U_0 \tag{179}$$

$$\sum_{\substack{\{j,i\}\in E\\ j<i}} x_{ji} + \sum_{\substack{\{i,j\}\in E\\ j>i}} x_{ij} = 2y_i + 1 \quad \text{pro } i \in U_1 \tag{180}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{pro } \{i,j\} \in E, i<j \tag{181}$$

$$y_i \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{pro } i \in U \tag{182}$$

12. Neorientovaná úloha čínského listonoše

Proměnné v modelu II:

$$x_{ij} = \text{počet hran } \{i,j\} \text{ v grafu } G^* \tag{183}$$

Model II:

$$\min \sum_{\{i,j\} \in E} c_{ij} x_{ij} \tag{184}$$

$$x_{ij} + x_{ji} \geq 1 \quad \text{pro } \{i,j\}, \{j,i\} \in E \tag{185}$$

$$\sum_{\{j,i\} \in E} x_{ji} = \sum_{\{i,j\} \in E} x_{ij} \quad \text{pro } i \in U \tag{186}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{pro } \{i,j\} \in E \tag{187}$$

13. Orientovaná úloha čínského listonoše

Formulace: Nechť $G = \{U, E\}$ je silně souvislý digraf. Pro každou hranu (i, j) jsou dány náklady c_{ij}. Cílem je najít cyklus s minimálními celkovými náklady takový, že v něm bude obsažena každá hrana alespoň jednou.

Věta: Orientovaný graf G je eulerovský právě tehdy, když G je silně souvislý a vstupní polostupeň každého uzlu je roven jeho výstupnímu polostupni.

Pokud G není eulerovský, sestrojíme supergraf G^* grafu G takový, že G^* je eulerovský a obsahuje Eulerův cyklus, který je kratší než Eulerův cyklus v jakémkoli jiném supergrafu grafu G.

13. Orientovaná úloha čínského listonoše

Značení:

$\deg_i^- =$ vstupní polostupeň uzlu i
$\deg_i^+ =$ výstupní polostupeň uzlu i
$I =$ množina uzlů i pro které $\deg_i^- > \deg_i^+$
$J =$ množina uzlů j pro které $\deg_j^- < \deg_j^+$
$a_i = \deg_i^- - \deg_i^+$ pro $i \in I$
$b_j = \deg_j^+ - \deg_j^-$ pro $j \in J$
$d_{ij} =$ délka nejkratší orientované cesty z $i \in I$ do $j \in J$

Proměnné:

$$x_{ij} = \text{počet nejkratších orientovaných cest mezi uzly } i \text{ a } j, \text{ které přidáme do grafu } G^* \tag{188}$$

13. Orientovaná úloha čínského listonoše

Model:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} \tag{189}$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = a_i \quad \text{pro } i \in I \tag{190}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = b_j \quad \text{pro } j \in J \tag{191}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{R}_+ \quad \text{pro } \begin{matrix} i \in I \\ j \in J \end{matrix} \tag{192}$$

14. Smíšená úloha čínského listonoše (čištění ulic)
CPP na smíšeném grafu $G = \{U, E\}$.

15. „Rural“ verze úlohy čínského listonoše (doručování pošty)
Nechť $G = \{U, E\}$ je souvislý s množinou $R \subset E$ povinných hran, kterými je nutné projet alespoň jednou. Zbývající hrany v množině $E \setminus R$ jsou volitelné a mohou být využity v optimální trase.

16. Kapacitní úloha čínského listonoše (svoz odpadu)
Nechť $G = \{U, E\}$ je souvislý graf s požadavky o velikosti q_{ij} pro každou hranu $\{i, j\}$ (pro každou povinnou hranu ve verzi „Rural CPP“). Pro uspokojení požadavků je k dispozici vozidlo s omezenou kapacitou. Je nutné najít cykly, aniž by na některém z nich došlo k překročení kapacity vozidla.

17. Hierarchická úloha čínského listonoše (odklízení sněhu pluhem)
U každé hrany je dána její priorita z hlediska důležitosti příslušné komunikace.

Obsah

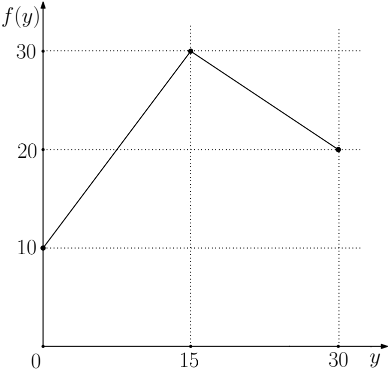
1. Po částech lineární funkce

Formulace: Po částech lineární funkce $f(y)$ je definována na množině intervalů $I_1, I_2, \dots, I_{r-1} : \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_3 \rangle, \dots, \langle a_{r-1}, a_r \rangle$. Pro každou mez intervalu a_k je dána funkční hodnota $f(a_k)$. Formulujte lineární model funkce pomocí diskrétních proměnných.

Příklad:

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 15$$
$$a_3 = 30$$

$$f(a_1) = 10$$
$$f(a_2) = 30$$
$$f(a_3) = 20$$



1. Po částech lineární funkce

Proměnné:

$$x_1 = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } y \in \langle 0, 15 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{193}$$

$$x_2 = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } y \in \langle 15, 30 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{194}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \begin{array}{l} \text{umělé proměnné použité} \\ \text{v konvexních kombinacích} \end{array} \tag{195}$$

1. Po částech lineární funkce

Formulace podmínek:

- Jestliže $y \in \langle 0, 15 \rangle$, pak

$$\left.\begin{array}{l} y = 0\lambda_1 + 15\lambda_2 = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 \\ f(y) = 10\lambda_1 + 30\lambda_2 = f(a_1)\lambda_1 + f(a_2)\lambda_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+ \end{array} \tag{196}$$

- Jestliže $y \in \langle 15, 30 \rangle$, pak

$$\left.\begin{array}{l} y = 15\lambda_2 + 30\lambda_3 = a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 \\ f(y) = 30\lambda_2 + 20\lambda_3 = f(a_2)\lambda_2 + f(a_3)\lambda_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_+ \end{array} \tag{197}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ x_2 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda_1 \leq x_1 \\ \lambda_3 \leq x_2 \\ (\lambda_2 \leq x_1 + x_2)^* \end{array} \tag{198}$$

* Nerovnost je důležitá v případě, že jsou definovány alespoň tři intervaly ($x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$).

1. Po částech lineární funkce

Model:

$$y = 0\lambda_1 + 15\lambda_2 + 30\lambda_3 \tag{199}$$

$$f(y) = 10\lambda_1 + 30\lambda_2 + 20\lambda_3 \tag{200}$$

$$\lambda_1 \leq x_1 \tag{201}$$

$$\lambda_2 \leq x_1 + x_2 \tag{202}$$

$$\lambda_3 \leq x_2 \tag{203}$$

$$x_1 + x_2 = 1 \tag{204}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \tag{205}$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\} \tag{206}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_+ \tag{207}$$

Speciální omezení s logickými proměnnými

1. Po částech lineární funkce

Proměnné v obecném modelu:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } y \in I_i = \langle a_i, a_{i+1} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, r-1 \tag{208}$$

$$\lambda_i = \text{umělá proměnná použitá v konvexních kombinacích} \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, r \tag{209}$$

Obecný model:

$$y = \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_i \tag{210}$$

$$f(y) = \sum_{i=1}^{r} f(a_i) \lambda_i \tag{211}$$

1. Po částech lineární funkce

Obecný model (pokrač.):

$$\sum_{i=1}^{r-1} x_i = 1 \tag{212}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1 \tag{213}$$

$$\lambda_1 \leq x_1 \tag{214}$$

$$\lambda_r \leq x_{r-1} \tag{215}$$

$$\lambda_i \leq x_{i-1} + x_i \quad \text{pro } i = 2, 3, \ldots, r-1 \tag{216}$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, r-1 \tag{217}$$

$$\lambda_i \in \mathbb{R}_+ \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, r \tag{218}$$

2. Nekonvexní množina přípustných řešení

Příklad: Jsou dány následující omezující podmínky. Použijte diskrétní proměnné tak, aby bylo možné úlohu s podmínkami řešit jako model MIP.

$$y_1 + y_2 \leq 40$$
$$y_1 \geq 20 \text{ nebo } y_2 \geq 10$$
$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+$$

Proměnné:

$$x_1 = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } y_1 \geq 20 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{219}$$

$$x_2 = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } y_2 \geq 10 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{220}$$

2. Nekonvexní množina přípustných řešení

Model:

$$y_1 + y_2 \leq 40 \tag{221}$$

$$y_1 \geq 20x_1 \tag{222}$$

$$y_2 \geq 10x_2 \tag{223}$$

$$x_1 + x_2 \geq 1 \tag{224}$$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+ \tag{225}$$

$$x_1, x_2 \in \{0, 1\} \tag{226}$$

Speciální omezení s logickými proměnnými

3. Platnost různých soustav omezení (typ buď-nebo)

Příklad: Tři různé produkty mohou být na stroji vyráběny buď v pořadí $P_1 \to P_2 \to P_3$ nebo $P_3 \to P_2 \to P_1$. Předpokládejme, že výroba produktu P_i trvá t_i. Formulujte omezující podmínky modelující přípustnou produkci.

Proměnné:

$$y_i = \text{okamžik začátku výroby produktu } P_i \tag{227}$$

$$x = \begin{cases} 1 & \text{vyrábí-li se produkty v pořadí } P_1 \to P_2 \to P_3 \\ 0 & \text{vyrábí-li se produkty v pořadí } P_3 \to P_2 \to P_1 \end{cases} \tag{228}$$

3. Platnost různých soustav omezení (typ buď-nebo)

Model:

$$y_1 + t_1 \leq y_2 + M(1 - x) \tag{229}$$

$$y_2 + t_2 \leq y_3 + M(1 - x) \tag{230}$$

$$y_3 + t_3 \leq y_2 + Mx \tag{231}$$

$$y_2 + t_2 \leq y_1 + Mx \tag{232}$$

$$y_i \in \mathbb{R}_+ \quad \text{pro } i = 1, 2, 3 \tag{233}$$

$$x \in \{0, 1\} \tag{234}$$

Speciální omezení s logickými proměnnými

4. Platnost různých soustav omezení (splnění k z m podmínek)

Příklad: Model obsahuje soustavu m omezujících podmínek. Nechť i-tá podmínka je definována jako $a_i^T y \leq b_i$. Zajistěte, aby bylo splněno přesně k ze všech m podmínek ($k < m$).

Umělé proměnné:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{je-li } i\text{-tá omezující podmínka zahrnuta v modelu} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{235}$$

Omezující podmínky:

$$a_i^T y \leq b_i + M(1 - x_i) \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \tag{236}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = k \tag{237}$$

5. Speciální omezení pro úroveň výroby

Příklad: Firma zvažuje výrobu nového produktu. V případě výroby, úroveň musí být alespoň 500 ks a nesmí překročit 1000 ks. Naformulujte odpovídající omezující podmínky.

Proměnné:

$$y = \text{úroveň výroby} \tag{238}$$

$$x = \begin{cases} 1 & \text{jestliže se firma rozhodne produkt vyrábět} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{239}$$

Model:

$$500x \leq y \leq 1000x \tag{240}$$

$$y \in \mathbb{Z}_+ \tag{241}$$

$$x \in \{0, 1\} \tag{242}$$

6. Plánování diskrétní úrovně výroby

Příklad: Firma zvažuje, zda vyrobit 500, 1000 nebo 2000 ks daného produktu. Naformulujte odpovídající omezující podmínky.

Proměnné:

$$y = \text{úroveň výroby} \tag{243}$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{je-li výroba na } i\text{-té úrovni} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3 \tag{244}$$

Model:

$$y = 500x_1 + 1000x_2 + 2000x_3 \tag{245}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \tag{246}$$

$$y \in \mathbb{Z}_+ \tag{247}$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \text{pro } i = 1, 2, 3 \tag{248}$$

7. Výroba určitého počtu druhů produktů

Příklad: Firma může teoreticky vyrábět n druhů produktů. Rozhodla se z nich ale vyrábět jen k druhů. Pro každý produkt i je dána maximální úroveň výroby q_i. Naformulujte odpovídající omezující podmínky.

Proměnné:

$$y_i = \text{úroveň výroby produktu } i \tag{249}$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{jestliže se produkt } i \text{ vyrábí} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{250}$$

Omezující podmínky:

$$\frac{1}{M} x_i \leq y_i \leq q_i x_i \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n \tag{251}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = k \tag{252}$$

7. Výroba určitého počtu druhů produktů

Příklad (rovnající se množství vyráběných druhů produktů):
V předchozím příkladu je navíc určeno, že se úrovně výroby u vyráběných druhů produktů musí rovnat (podmínka komplementarity).

Další proměnné:

$$w = \text{úroveň výroby vyráběných druhů produktů} \tag{253}$$

Další omezující podmínky:

$$w - M(1 - x_i) \leq y_i \leq w + M(1 - x_i) \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n \tag{254}$$

8. Definice proměnné rovnající se minimu dalších proměnných

Příklad: Zapište proměnnou jako minimum n proměnných.

Proměnné:

$$w = \min(y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{255}$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } w = y_i \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{256}$$

Omezující podmínky:

$$w \leq y_i \leq w + M(1 - x_i) \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n \tag{257}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq 1 \tag{258}$$

9. Linearizace součinu binárních proměnných

Příklad: Linearizujte maximalizační účelovou funkci $x_1 x_2 x_3$ (všechny proměnné jsou binární).

Umělá proměnná:

$$w = x_1 x_2 x_3 \tag{259}$$

Model:

$$\max\ w \tag{260}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2 \leq w \tag{261}$$

$$w \leq x_i \quad \text{pro } i = 1, 2, 3 \tag{262}$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \text{pro } i = 1, 2, 3 \tag{263}$$

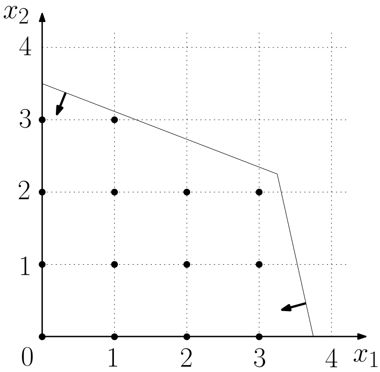
$$w \in \mathbb{R}_+ \tag{264}$$

Obsah

Množina přípustných bodů v úlohách lineárního a celočíselného programování

$$\text{(LP)} \qquad P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\} \tag{265}$$

$$\text{(IP)} \qquad S = \{x \in \mathbb{Z}^n_+ : Ax \leq b\} \tag{266}$$



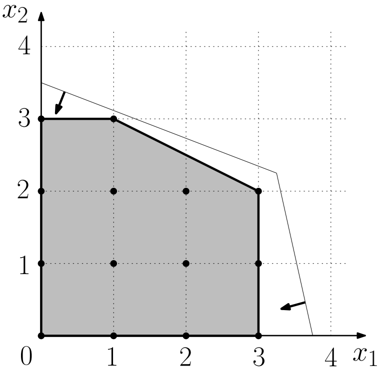
Vlastnosti diskrétních úloh

Definice: *Polyedr* $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je množina bodů, které splňují konečný počet lineárních nerovností: $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Polyedr je *omezený*, jestliže existuje hodnota $\delta \in \mathbb{R}_+$ taková, že $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : -\delta \leq x_j \leq \delta \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, n\}$. Omezený polyedr se nazývá *polytop*.

Definice: Nechť je dána množina $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Bod $x \in \mathbb{R}^n$ je *konvexní kombinací* bodů z S, jestliže existuje konečná množina bodů $\{x^1, x^2, \ldots, x^t\}$ v S a vektor $\lambda \in \mathbb{R}^t_+$ takový, že $\sum_{i=1}^t \lambda_i = 1$ a $x = \sum_{i=1}^t \lambda_i x^i$.

Definice: $T \subseteq \mathbb{R}^n$ je *konvexní množina*, pokud platí: jestliže $x^1, x^2 \in T$, pak $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in T$ pro všechna $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$.

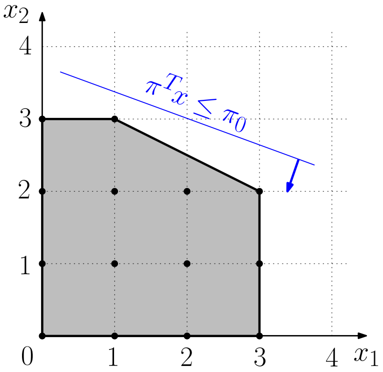
Definice: *Konvexní obal* conv(S) množiny S je množina všech bodů, které jsou konvexní kombinací bodů z S.



$S \subset \mathrm{conv}(S) \subset P$

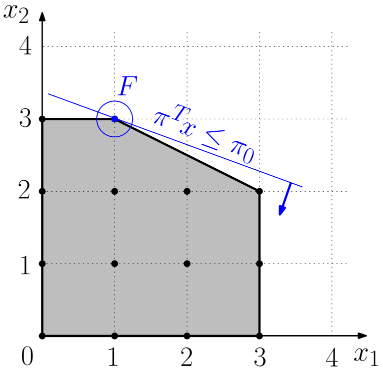
Vlastnosti diskrétních úloh

Definice: Nerovnost $\pi^T x \leq \pi_0$ se nazývá *platná nerovnost* vzhledem k S, jestliže ji splňují všechny body z S.

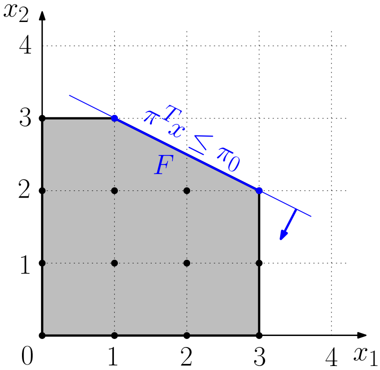


Vlastnosti diskrétních úloh

Definice: Jestliže $\pi^T x \leq \pi_0$ je platná nerovnost vzhledem k S a $\exists x^0 \in S$ takový, že $\pi^T x^0 = \pi_0$, pak se nerovnost nazývá *opěrná nerovnost* vzhledem k S. Množina $F = \{x \in \text{conv}(S) : \pi^T x = \pi_0\}$ se nazývá *opěrná stěna* množiny conv(S). Říkáme, že opěrná nerovnost $\pi^T x \leq \pi_0$ *reprezentuje* opěrnou stěnu F.



Definice: Opěrná stěna F množiny conv(S) se nazývá *fazeta* množiny conv(S), jestliže $\dim F = \dim \operatorname{conv}(S) - 1$.



Vlastnosti diskrétních úloh

Definice: Platné nerovnosti $\pi^T x \leq \pi_0$ a $\gamma^T x \leq \gamma_0$ se nazývají *ekvivalentní*, jestliže $\gamma = \lambda\pi$ a $\gamma_0 = \lambda\pi_0$ pro některé $\lambda > 0$.

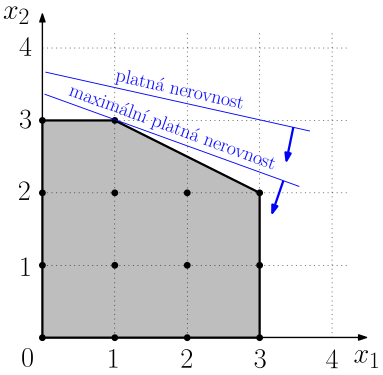
Definice: Nechť $\pi^T x \leq \pi_0$ a $\gamma^T x \leq \gamma_0$ jsou dvě platné nerovnosti vzhledem k conv(S), které nejsou ekvivalentní. Jestliže existuje hodnota $\lambda > 0$ taková, že $\gamma \geq \lambda\pi$ a $\gamma_0 \leq \lambda\pi_0$, pak říkáme, že $\gamma^T x \leq \gamma_0$ *dominuje (je silnější než)* $\pi^T x \leq \pi_0$. Říkáme také, že $\pi^T x \leq \pi_0$ *je dominována (je slabší než)* $\gamma^T x \leq \gamma_0$.

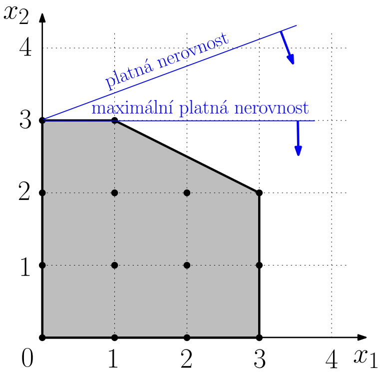
Pokud $\gamma^T x \leq \gamma_0$ *dominuje* $\pi^T x \leq \pi_0$, pak $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \gamma^T x \leq \gamma_0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \pi^T x \leq \pi_0\}$.

Definice: *Maximální* platná nerovnost je taková, která není dominována žádnou jinou platnou nerovností.

Vlastnosti diskrétních úloh

Každá maximální platná nerovnost vzhledem k S reprezentuje neprázdnou opěrnou stěnu množiny conv(S) a množina všech maximálních platných nerovností obsahuje nerovnosti, které reprezentují všechny fazety množiny conv(S).

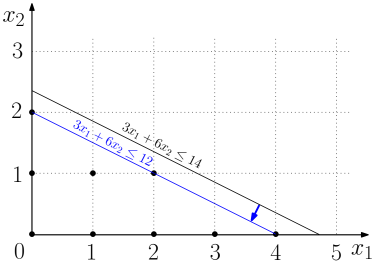




Zesilování nerovností

Věta (Diophantos): Lineární rovnice $\sum_{j=1}^{n} \pi_j x_j = \pi_0$, v níž $\pi_j \in \mathbb{Z}$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, má řešení $x \in \mathbb{Z}^n$, právě tehdy, když největší společný dělitel koeficientů π_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ dělí celočíselně hodnotu π_0.

Příklad: Nechť $3x_1 + 6x_2 \leq 14$ je platná nerovnost vzhledem k S. Cílem je najít silnější platnou nerovnost, která je opěrnou nerovností vzhledem k S.



Vlastnosti diskrétních úloh

Zesilování nerovností - lifting

Definice: Nechť je dána nerovnost $\sum_{j=1}^{n} \pi_j x_j \leq \pi_0$, v níž $\pi_j \in \mathbb{R}_+$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ a $x \in \mathbb{B}^n$. Jestliže pro nějakou hodnotu $\Delta_k > 0$ je nerovnost $\sum_{j=1}^{n} \pi_j x_j + \Delta_k x_k \leq \pi_0$ platná, pak říkáme, že je *liftovaná* z původní nerovnosti vzhledem k proměnné x_k.

Algoritmus:

Opakuj pro $k = 1, 2, \ldots, n$:

1. Nastav $x_k = 1$ a vypočti $\alpha_k = \max\limits_{x_k \in \mathbb{B}} \sum_{j=1}^{n} \pi_j x_j \leq \pi_0$
2. Vypočti $\Delta_k = \pi_0 - \alpha_k$
3. Nahraď π_k součtem $\pi_k + \Delta_k$
4. Nerovnost $\sum_{j=1}^{n} \pi_j x_j \leq \pi_0$ je liftovaná vzhledem k proměnné x_k

Nerovnost $\sum_{j=1}^{n} \pi_j x_j \leq \pi_0$ je liftovaná vzhledem ke všem proměnným.

Vlastnosti diskrétních úloh

Zesilování nerovností - lifting

Příklad: Liftujte nerovnost $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 \leq 13$, kde $x_j \in \mathbb{B}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$.

$x_1 = 1 \to \alpha_1 = 12 \to \Delta_1 = 1 \to \pi_1 = 5 \to 5x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 \leq 13$

$x_2 = 1 \to \alpha_2 = 13 \to \Delta_2 = 0 \to \pi_2 = 5 \to 5x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 \leq 13$

$x_3 = 1 \to \alpha_3 = 11 \to \Delta_3 = 2 \to \pi_3 = 8 \to 5x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 8x_4 \leq 13$

$x_4 = 1 \to \alpha_4 = 13 \to \Delta_4 = 0 \to \pi_4 = 8 \to 5x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 8x_4 \leq 13$

Zesilování nerovností - fixing

Příklad: Nechť je dána nerovnost $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 15x_4 \geq 2$, v níž $x_j \in \mathbb{B}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$.

Pokud $x_4 = 1$, nerovnost nemůže být splněna $\rightarrow$ přípustné řešení existuje jen tehdy, jestliže proměnná je zafixována $x_4 = 0$.

Příklad: Nechť je dána nerovnost $20x_1 + 5x_2 + 1x_3 - 8x_4 \geq 7$, v níž $x_j \in \mathbb{B}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$.

Zafixování $x_1 = 1$.

Příklad: Nechť je dána rovnice $x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$, v níž $x_j \in \mathbb{B}$ $(j = 1, 2, 3)$.

Protože $x_3 = 0$ je nepřípustné, proměnná je zafixována $x_3 = 1$.

Potom je rovnice redukována na rovnici $x_1 + x_2 = 1$.

Zesilování nerovností - Gomoryho řez

Nechť $S = \{x \in \mathbb{Z}_+^n : \pi^T x = \pi_0\}$, kde $\pi_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$.
Zvolíme-li libovolně $d \in \mathbb{N}$, pak každý koeficient π_j lze vyjádřit jako

$$\pi_j = \alpha_j d + \pi'_j, \tag{267}$$

kde $\alpha_j = \left\lfloor \frac{\pi_j}{d} \right\rfloor$ a $\pi'_j = \pi_j \bmod d$. Tedy $\alpha_j \in \mathbb{Z}$ a $\pi'_j \in \langle 0, d)$.
Pak rovnici

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j x_j = \pi_0 \tag{268}$$

lze psát jako

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j d + \pi'_j) x_j = \alpha_0 d + \pi'_0 \tag{269}$$

nebo

$$d\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j - \alpha_0\right) = \pi'_0 - \sum_{j=1}^{n} \pi'_j x_j. \tag{270}$$

Vlastnosti diskrétních úloh

Zesilování nerovností - Gomoryho řez

Protože hodnota na levé straně nerovnosti (270) je celočíselným násobkem hodnoty d, hodnota na pravé straně musí být také celočíselná. Vzhledem k $\pi'_0 \in \langle 0, d)$ a $\sum_{j=1}^{n} \pi'_j x_j \geq 0$, hodnota na pravé straně nemůže být kladným násobkem d, tj. musí být nekladná. Proto také hodnota na levé straně musí být nekladná.

Zlomkový Gomoryho řez:

$$\pi'_0 - \sum_{j=1}^{n} \pi'_j x_j \leq 0 \qquad \rightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} \pi'_j x_j \geq \pi'_0 \tag{271}$$

Celočíselný Gomoryho řez:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j - \alpha_0 \leq 0 \qquad \rightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \leq \alpha_0 \tag{272}$$

Vlastnosti diskrétních úloh

Zesilování nerovností - Gomoryho řez

Příklad: Nechť $S = \{x \in \mathbb{Z}_+^3 : 37x_1 - 68x_2 + 78x_3 \leq 141\}$. Nalezněte silnější platnou nerovnost vzhledem k S.

Transformace na rovnici $37x_1 - 68x_2 + 78x_3 + x_4 = 141$

Zvolíme $d = 12$

$$\begin{aligned} 37 &= 3.12 + 1 \\ -68 &= -6.12 + 4 \\ 78 &= 6.12 + 6 \\ 1 &= 0.12 + 1 \\ 141 &= 11.12 + 9 \end{aligned}$$

Zlomkový Gomoryho řez: $x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 9$

Celočíselný Gomoryho řez: $3x_1 - 6x_2 + 6x_3 \leq 11$

Obsah

Unimodularita

Definice: Čtvercová celočíselná matice A se nazývá *unimodulární*, jestliže její determinant $\det(A) = \pm 1$. Celočíselná matice A se nazývá *totálně unimodulární*, jestliže každá čtvercová nesingulární submatice A je unimodulární.

Pozn.: Je-li matice A totálně unimodulární, pak $a_{ij} \in \{+1, -1, 0\}$ pro všechna i, j.

Věta (postačující podmínka): Matice A je totálně unimodulární, jestliže

- $a_{ij} \in \{+1, -1, 0\}$ pro všechna i, j
- každý sloupec obsahuje nejvýše dva nenulové koeficienty
- řádky matice A mohou být rozděleny do dvou množin takových, že
    - jestliže sloupec obsahuje dva koeficienty se stejným znaménkem, jejich řádky leží v různých množinách
    - jestliže sloupec obsahuje dva koeficienty s různými znaménky, jejich řádky leží ve stejné množině

Unimodularita

Nechť je dána následující úloha LP s celočíselnými A, b:

$$z_{\text{LP}} = \max\{c^T x : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n_+\}. \tag{273}$$

Vektor základních proměnných lze vyjádřit jako

$$x_B = B^{-1} b = \frac{B^{\text{adj}}}{\det(B)} b, \tag{274}$$

kde B je matice báze, B^{-1} její inverze a B^{adj} je adjungovaná matice B (transponovaná matice algebraických doplňků prvků matice B).

Pozn.: Je-li optimální matice báze B unimodulární, pak optimální řešení je celočíselné.

Tvrzení: Je-li matice A totálně unimodulární, pak optimální řešení je celočíselné.

Příklady: dopravní problém, úloha hledání maximálního toku, ...

Obsah

Relaxace

Definice: Nechť je dána následující úloha celočíselného programování (IP):

$$z_{\mathrm{IP}} = \max\{c^T x : x \in S \subseteq \mathbb{Z}_+^n\}. \tag{275}$$

Úloha (R)

$$z_{\mathrm{R}} = \max\{d^T x : x \in X \subseteq \mathbb{R}_+^n\} \tag{276}$$

je *relaxace* úlohy (IP), jestliže

- $S \subseteq X$
- $d^T x \geq c^T x$ pro všechna $x \in X$.

Tvrzení: Je-li úloha (R) relaxace úlohy (IP), pak $z_{\mathrm{R}} \geq z_{\mathrm{IP}}$, tj. z_{R} je horní mez pro z_{IP}.

Relaxace

Lineární relaxace

Definice: Nechť je dána následující úloha celočíselného programování (IP):

$$z_{\mathrm{IP}} = \max\{c^T x : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}_+^n\}. \tag{277}$$

Úloha (LP)

$$z_{\mathrm{LP}} = \max\{c^T x : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}_+^n\} \tag{278}$$

je *lineární relaxace* úlohy (IP).

V případě úlohy bivalentního programování (BIP)

$$z_{\mathrm{BIP}} = \max\{c^T x : Ax \leq b, x \in \mathbb{B}^n\}, \mathbb{B} = \{0, 1\} \tag{279}$$

je lineární relaxace definována jako

$$z_{\mathrm{LP}} = \max\{c^T x : Ax \leq b, 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{280}$$

Lineární relaxace

Definice: Hodnota *absolutní gap* je definována jako rozdíl

$$\text{Gap} = z_{\text{LP}} - z_{\text{IP}} \tag{281}$$

a pro $z_{\text{IP}} \neq 0$ je hodnota *relativní gap* definována jako

$$\text{Gap\%} = \frac{z_{\text{LP}} - z_{\text{IP}}}{|z_{\text{IP}}|} 100\%. \tag{282}$$

Lineární relaxaci lze zapsat též jako

$$z_{\text{LP}} = \max\{c^T x : x \in Q\}, \tag{283}$$

kde $S = \{x : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}_+^n\} \subset \text{conv}(S) \subset Q$.

Lagrangeova relaxace

Definice: Nechť je dána následující úloha celočíselného programování (IP):

$$z_{\mathrm{IP}} = \max\{c^T x : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n_+\}. \tag{284}$$

Úlohu lze přepsat jako

$$z_{\mathrm{IP}} = \max\{c^T x : A^1 x \leq b^1, A^2 x \leq b^2, x \in \mathbb{Z}^n_+\}, \tag{285}$$

kde $A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}$.

$A^1 x \leq b^1$ je soustava m_1 „komplikujících omezení“ a $A^2 x \leq b^2$ je soustava m_2 „vhodných omezení“.

Pak pro jakékoli $\lambda \in \mathbb{R}^{m_1}_+$ se úloha (LR(λ))

$$z_{\mathrm{LR}}(\lambda) = \max\{c^T x + \lambda^T (b^1 - A^1 x) : A^2 x \leq b^2, x \in \mathbb{Z}^n_+\} \tag{286}$$

nazývá *Lagrangeova relaxace* úlohy (IP) vzhledem k podmínkám $A^1 x \leq b^1$.

Relaxace

Lagrangeova relaxace

Tvrzení: LR(λ) je relaxace úlohy (IP) pro všechny hodnoty $\lambda \geq 0$, tj. $z_{\text{LR}}(\lambda) \geq z_{\text{IP}}$ pro všechny hodnoty $\lambda \geq 0$.

Definice: Nejnižší horní mez získaná z nekonečné množiny relaxací $\{(LR(\lambda)\}_{\lambda \geq 0}$ je $z_{\text{LR}}(\lambda^*)$, kde hodnota λ^* je optimálním řešením úlohy (LD)

$$z_{\text{LD}} = \min_{\lambda \geq 0} z_{\text{LR}}(\lambda). \tag{287}$$

Úloha (LD) se nazývá *Lagrangeova duální úloha* úlohy (IP) vzhledem k podmínkám $A^1 x \leq b^1$.

Obsah

Metoda řezných nadrovin

Algoritmus je založen na simplexové metodě.

Řezná nadrovina (nebo jednoduše *řez*) je lineární omezující podmínka, která nevylučuje žádné přípustné celočíselné řešení.

1. Vyřeš lineární relaxaci původní úlohy.
2. Je-li optimální řešení celočíselné, jdi na krok 5.
3. Vyber proměnnou, jejíž optimální hodnota není celočíselná a sestav Gomoryho řez podle (271). Ten je přidán do simplexové tabulky jako
$$-\sum_{j=1}^{n} \pi'_j x_j + x_{n+1} = -\pi'_0, \tag{288}$$
kde x_{n+1} je přídatná proměnná.
4. Pokračuj duálním simplexovým algoritmem pro získání optimálního řešení. Jdi na krok 2.
5. Konec

Metoda větvení a mezí

Tvrzení: Je dána úloha $z_{\mathrm{IP}} = \max\{c^T x : x \in S\}$. Nechť $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_K$ je dekompozice množiny S na menší množiny a nechť $z^k = \max\{c^T x : x \in S_k\}$ pro $k = 1, 2, \ldots, K$. Pak $z_{\mathrm{IP}} = \max_k z^k$.

Značení:
M je posloupnost úloh řešených ve větvích výpočetního stromu,
x^* je dosud nejlepší nalezené celočíselné řešení,
$z^* = c^T x^*$ je dosud nejlepší hodnota účelové funkce pro celočíselné řešení.

Algoritmus:

1. *Počáteční nastavení*
   $M = (LP)$, LP je lineární relaxace původní úlohy,
   x^* není definován,
   $z^* = -\infty$.

Metoda větvení a mezí

2. *Výběr řešené úlohy*
   Pokud $M = ()$, jdi na krok 5,
   jinak vyber poslední úlohu v posloupnosti M.
3. *Řešení vybrané úlohy*
   (a) Jestliže neexistuje přípustné řešení, odstraň úlohu z M a jdi na krok 2.
   (b) Je-li nalezeno optimální řešení x^0 s hodnotou účelové funkce z^0, pak
      (b1) pokud $z^0 \leq z^*$, odstraň úlohu z M a jdi na krok 2,
      (b2) pokud $z^0 > z^*$ a řešení x^0 je celočíslené, nahraď $x^* = x^0, z^* = z^0$, odstraň úlohu z M a jdi na krok 2,
      (b3) pokud $z^0 > z^*$ a řešení x^0 není celočíselné, jdi na krok 4.

Metoda větvení a mezí

4. *Větvení*

   Vyber proměnnou x_k, jejíž optimální hodnota není celočíselná. Přidej kopii poslední řešené úlohy na konec posloupnosti M spolu s omezující podmínkou

$$x_k \leq \lfloor x_k^0 \rfloor. \tag{289}$$

   K předposlední úloze v M přidej omezující podmínku

$$x_k \geq \lfloor x_k^0 \rfloor + 1. \tag{290}$$

   Jdi na krok 2.

5. *Konec*

   Optimální celočíselné řešení je x^*, optimální hodnota účelové funkce je z^*.

Metoda větvení a mezí

Tvrzení: Větev výpočetního stromu je uzavřena, pokud v jejím uzlu nastane jedna ze tří možností:

- úloha nemá řešení,
- optimální řešení x^0 je celočíselné,
- platí $z^0 \leq z^*$.

V případě bivalentní úlohy (v níž je n binárních proměnných), je n maximální hloubka výpočetního stromu a 2^n maximální počet jeho listů.

Exaktní metody

Metoda větvení a mezí

Výběr uzlu

- Apriorní pravidla
  - uzly jsou vybírány v opačném pořadí, než jsou vytvářeny (LIFO)
  - uzly se zpracovávají po vrstvách stromu
- Adaptivní pravidla
  - výběr uzlu s nejvyšší horní mezí

Výběr větvící proměnné

- Výběr proměnné, jejíž hodnota nejvíce porušuje celočíselnost
- Výběr proměnné na základě řešení lineárních relaxací s dolní a horní mezí dané proměnné (provede se pouze 1 iterace simplexové tabulky, jedná se tedy o odhad poklesu hodnoty účelové funkce)

Exaktní metody

Metoda větvení a mezí

Vylepšení metody

- Metoda větvení a řezů
  Jedná se o kombinaci metody větvení a mezí s metodou řezných nadrovin za účelem zesílit lineární relaxace v uzlech výpočetního stromu.
- Metoda větvení a oceňování
  Metoda se používá pro řešení úloh IP a MIP s velkým počtem proměnných. Jedná se o hybridní spojení metody větvení a mezí s algoritmem generování sloupců.

Obsah

Výpočetní složitost

Složitost algoritmů

Velikost (rozsah) úlohy:

- lineární programování
  m ... počet omezujících podmínek
  n ... počet proměnných
- úlohy na grafech
  $|U|$ ... počet uzlů
  $|E|$ ... počet hran

Výpočetní složitost algoritmu je funkcí velikosti úlohy, kterou algoritmus řeší, např. $f(n)$.

Složitost algoritmů

Nechť elementární operace v počítači trvá 1 ns. V následující tabulce je uvedena závislost výpočetního času pro různé funkce a velikost úlohy.

$f(n)$	n (velikost úlohy)				
	10	20	50	100	1000
n	10 ns	20 ns	50 ns	100 ns	1 µs
$n \log n$	10 ns	26 ns	85 ns	200 ns	3 µs
n^2	100 ns	400 ns	2.5 µs	10 µs	1 ms
n^3	1 µs	8 µs	125 µs	1 ms	1 s
2^n	1 µs	1 ms	13 dnů	10^{13} let	-
3^n	59 µs	4 s	10^7 let	-	-
$n!$	4 ms	77 let	-	-	-

Výpočetní složitost

Složitost algoritmů

Důležitá je asymptotická míra růstu složitosti algoritmu.

Definice: Nechť $f(n)$ a $g(n)$ jsou reálné funkce přirozených čísel.

- Píšeme $f(n) = O(g(n))$, pokud existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro dostatečně velká n je $f(n) \leq cg(n)$ (notace velké O).
- Píšeme $f(n) = \Omega(g(n))$, pokud existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro dostatečně velká n je $f(n) \geq cg(n)$ (notace velké omega).
- Píšeme $f(n) = \Theta(g(n))$, pokud existují konstanty $c, c' > 0$ takové, že pro dostatečně velká n je $cg(n) \leq f(n) \leq c'g(n)$ (notace velké theta).

Polynomiální algoritmy: $n, n^2, n^3, \log n, n \log n$

Nepolynomiální algoritmy: $2^n, e^n, n!$

Třídy úloh

Třída $\mathcal{P}$

Jedná se o třídu rozhodovacích úloh, které lze řešit v polynomiálním čase. Rozhodovací úloha velikosti n leží ve třídě $\mathcal{P}$, jestliže pro ni existuje algoritmus s $f(n) = O(n^p)$ pro nějaké pevně dané p.

Třída $\mathcal{PO}$

Je to třída optimalizačních úloh řešitelných v polynomiálním čase. Optimalizační úloha rozměru n leží ve třídě $\mathcal{PO}$, jestliže pro ni existuje algoritmus s $f(n) = O(n^p)$ pro nějaké pevně dané p.

Vybrané úlohy řešitelné v polynomiálním čase.

- Minimální kostra grafu.
- Úloha hledání nejkratší cesty v grafu.
- Úloha hledání maximálního toku.
- Lineární přiřazovací problém.
- Úloha lineárního programování.

Třídy úloh

Třída $\mathcal{NP}$

Jedná se o třídu rozhodovacích úloh řešitelných *nedeterministickým polynomiálním algoritmem* sestávajícím ze dvou fází:

1. Navrhovací (nedeterministická) fáze
   Je vygenerováno řešení.
2. Ověřující fáze
   Pomocí polynomiálního algoritmu je dokazováno, zda řešení je přípustné.

Rozhodovací úloha leží ve třídě $\mathcal{NP}$, jestliže kladné rozhodnutí je ověřeno v polynomiálním čase.

Leží-li úloha ve třídě $\mathcal{P}$, pak leží také ve třídě $\mathcal{NP}$, tj. $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP}$.

Příklady $\mathcal{NP}$-řešitelných úloh: hledání Hamiltonova cyklu v daném grafu, hledání přípustného řešení úlohy MIP, ...

Třídy úloh

Třída $\mathcal{NPO}$

Optimalizační úloha leží ve třídě $\mathcal{NPO}$, pokud její rozhodovací verze leží ve třídě $\mathcal{NP}$.

Leží-li úloha ve třídě $\mathcal{PO}$, pak leží ve třídě $\mathcal{NPO}$, tj. $\mathcal{PO} \subset \mathcal{NPO}$.

Definice: Rozhodovací úloha A je *polynomiálně redukovatelná* na rozhodovací úlohu B, jestliže existuje polynomiální funkce transformující zadání úlohy A na zadání úlohy B taková, že z řešení úlohy B lze odvodit řešení úlohy A.

Jestliže je rozhodovací úloha A redukovatelná na rozhodovací úlohu B, pak pokud existuje algoritmus pro řešení úlohy B, lze jej použít pro řešení úlohy A.

Rozhodovací úloha A je speciální případ rozhodovací úlohy B, tj. B je obecnější, a tudíž složitější.

Třídy úloh

Tvrzení: Je-li úloha A polynomiálně redukovatelná na úlohu B a $B \in \mathcal{P}$, pak $A \in \mathcal{P}$.

Tvrzení: Je-li úloha A polynomiálně redukovatelná na úlohu B a $B \in \mathcal{NP}$, pak $A \in \mathcal{NP}$.

Třída $\mathcal{NPC}$

Říkáme, že rozhodovací úloha $A \in \mathcal{NP}$ je $\mathcal{NP}$-*úplná*, pokud všechny problémy ve třídě $\mathcal{NP}$ lze polynomiálně redukovat na úlohu A.

Tvrzení: Je-li úloha $A \in \mathcal{NPC}$ polynomiálně redukovatelná na úlohu $B \in \mathcal{NP}$, pak $B \in \mathcal{NPC}$.

Důsledek: Abychom dokázali, že daná úloha je $\mathcal{NP}$-úplná, je nutné:

- prokázat, že úloha leží ve třídě $\mathcal{NP}$ a
- najít nějakou známou $\mathcal{NP}$-úplnou úlohu, která je na danou úlohu redukovatelná.

Třídy úloh

Tvrzení: Jestliže $\mathcal{P} \cap \mathcal{NPC} \neq \emptyset$, pak $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Důsledek: Kdyby existoval polynomiální algoritmus, který by řešil nějakou $\mathcal{NP}$-úplnou úlohu, pak, s použitím redukovatelnosti, bychom všechny úlohy v $\mathcal{NP}$ dokázali řešit v polynomiálním čase.

Příklady $\mathcal{NP}$-úplných úloh (některé z nich jsou binárními verzemi optimalizačních úloh):

- Přípustné řešení úlohy BIP.
- Přípustné řešení rozkladu množiny.
- Přípustné řešení úlohy batohu s dolní mezí účelové funkce.
- Hamiltonův cyklus.
- Přípustné řešení úlohy TSP s horní mezí účelové funkce.
- Přípustné řešení kvadratického přiřazovacího problému s horní mezí účelové funkce.
- Rozdělení dané množiny přirozených čísel do dvou podmnožin se stejným součtem (Partition problem).

Třídy úloh

Třída $\mathcal{NPH}$

Optimalizační úloha je $\mathcal{NP}$-*obtížná, těžká*, jestliže její rozhodovací verze leží ve třídě $\mathcal{NPC}$.

Příklady $\mathcal{NP}$-obtížných úloh:

- Úloha IP.
- Úloha batohu.
- TSP.
- Minimální Steinerův strom.
- Kvadratický přiřazovací problém.
- Kontejnerový dopravní problém.

Obsah

Heuristiky a metaheuristiky

Přibližné metody:

- Heuristika
  Je to postup, který vede k získání dobrého řešení (blízkého optimálnímu řešení) konkrétní optimalizační úlohy.
- Metaheuristika
  Je to přístup, který lze přizpůsobit k řešení širokého okruhu úloh.

Základní principy použití přibližné metody:

- používá se k řešení úloh $\mathcal{NPC}$ a $\mathcal{NPH}$,
- nezaručuje nalezení optimálního řešení (poskytuje tzv. suboptimální řešení),
- je to polynomiální algoritmus,
- lze jej snadno upravit pro řešení konkrétní úlohy.

Heuristiky pro TSP

Klasifikace metod:

- Konstruktivní heuristiky.
- Zatřiďovací heuristiky.
- Zlepšující heuristiky.

Předpoklad: je dána matice vzdáleností mezi všemi dvojicemi uzlů (je definován úplný graf)

Metoda nejbližšího souseda

1. Vyber libovolný uzel jako výchozí pro vytvářenou trasu.
2. Najdi nejbližší uzel (dosud nevybraný) k poslednímu uzlu na trase a přidej ho na konec trasy. Pokud takový uzel neexistuje (všechny uzly již byly vybrány), pak přidej na konec trasy výchozí uzel (je vytvořen Hamiltonův cyklus) a jdi na krok 4.
3. Jdi na krok 2.
4. Konec.

Metoda výhodnostních čísel (Clarke a Wright)

1. Vypočti výhodnostní čísla

$$s_{ij} = c_{i1} + c_{1j} - c_{ij} \quad \text{pro} \quad \begin{matrix} i = 2, 3, \ldots, n \\ j = 2, 3, \ldots, n \end{matrix} \quad i \neq j. \tag{291}$$

2. Vytvoř $(n-1)$ tras $(1, i, 1)$ pro $i = 2, 3, \ldots, n$ a setřiď výhodnostní čísla sestupně.

Paralelní verze

3. (Nejlepší přípustné zatřídění)
   Podle setříděných čísel postupujeme následujícím způsobem. Pro dané výhodnostní číslo s_{ij} zjistíme, zda existují dvě trasy, z nichž první obsahuje hranu $(1, j)$ a druhá hranu $(i, 1)$, které mohou být přípustným způsobem zatříděny. V takovém případě spojíme tyto dvě trasy v jednu odstraněním hran $(1, j)$, $(i, 1)$ a vložením hrany (i, j).

Metoda výhodnostních čísel (Clarke a Wright)

Sekvenční verze

3. (Nastavení trasy)
   Uvažujme trasu $(1, i, \ldots, j, 1)$. Najdi první výhodnostní číslo s_{ki} nebo s_{jl} takové, že uzly k a l jsou zahrnuty v jiných trasách obsahujících hranu $(k, 1)$ nebo hranu $(1, l)$.
4. Proveď zatřídění a opakuj tento postup dokud není vytvořen Hamiltonův cyklus.

Vkládací algoritmus

1. Vyber libovolný uzel jako výchozí pro vytvářenou trasu, např. uzel 1.
2. Najdi nejvzdálenější uzel s k výchozímu uzlu a vytvoř trasu $(1, s, 1)$.
3. Do stávající trasy postupně vkládej další dosud nezahrnuté uzly (na základě minimalizace prodloužení trasy), dokud nevznikne Hamiltonův cyklus.

Metoda minimální kostry

Nechť je daný úplný graf $G = \{U, E\}$.

1. Najdi minimální kostru $G' = \{U, E'\}$ grafu G.
2. Z grafu G' sestroj multigraf G^* zdvojením každé hrany z E'.
3. Najdi Eulerův cyklus Q v grafu G^*.
4. Z cyklu Q odstraň všechna opakování všech uzlů s výjimkou návratu do výchozího uzlu. Výsledná posloupnost uzlů T představuje Hamiltonův cyklus v grafu G.

Christofidova metoda

Nechť je daný úplný graf $G = \{U, E\}$.

1. Najdi minimální kostru $G' = \{U, E'\}$ grafu G.
2. Najdi minimální perfektní párování na odvozeném podgrafu $G(U_0)$ grafu G, kde $U_0 \subseteq U$ je množina uzlů, které mají v G' lichý stupeň. Nechť M je množina hran v perfektním párování.
3. Najdi Eulerův cyklus Q na multigrafu $G^* = \{U, E' \cup M\}$.
4. Z cyklu Q odstraň všechna opakování všech uzlů s výjimkou návratu do výchozího uzlu. Výsledná posloupnost uzlů T představuje Hamiltonův cyklus v grafu G.

Metoda zatřiďování cyklů

Nechť je daný úplný graf $G = \{U, E\}$.

1. Najdi výchozí systém cyklů $\mathcal{F}$ (např. použitím metody perfektního párování; jestliže počet uzlů v U je lichý, pak jeden z cyklů bude obsahovat 3 uzly).
2. Proveď zatřídění dvou cyklů α^* a β^* s použitím následující metriky:

$$D_{\alpha^* \beta^*} = \min_{\alpha, \beta \in \mathcal{F}} D_{\alpha\beta} = \min_{\substack{i,k \in \alpha \\ j,l \in \beta}} (c_{ij} + c_{kl} - c_{ik} - c_{jl}). \tag{292}$$

   Nechť tímto zatříděním vznikne cyklus γ.
3. Odstraň cykly α^* a β^* z $\mathcal{F}$, přidej do $\mathcal{F}$ cyklus γ.
4. Jestliže γ není Hamiltonův cyklus, jdi na krok 2.

Heuristiky a metaheuristiky

Metoda výměn (Lin a Kernighen)

Nechť je daný úplný graf $G = \{U, E\}$.

1. Předpokládejme nalezení Hamiltonova cyklu některou konstruktivní nebo zatřiďovací heuristikou.
2. Vyměň dvě nesousední hrany z trasy za jiné dvě nesousední hrany tak, aby byl opět vytvořen Hamiltonův cyklus.
3. Pokud tato výměna přináší zlepšení řešení, proveď ji.
4. Opakuj proces hledání výměn dokud je možné zlepšovat řešení. Metoda končí, jestliže již není možné řešení zlepšit.
5. Získaný Hamiltonův cyklus je lokálně optimální (2-opt) trasa.

Metaheuristiky

Značení v algoritmech:

x je přípustné řešení dané úlohy

X je množina přípustných řešení, tj. množina všech x

$N(x)$ je okolí řešení x (množina blízkých řešení)

$f(x)$ je minimalizační účelová funkce

x^* je dosud nejlepší nalezené řešení

Metoda lokálního hledání

1. Vyber výchozí řešení $x \in X$ a přiřaď $x^* = x$.
2. Definuj okolí $N(x) \subseteq X$ a ohodnoť všechna řešení.
3. Nechť x' je nejlepší řešení z $N(x)$.
   Jestliže $f(x') < f(x^*)$, pak nahraď $x^* = x'$ a $x = x'$, jinak ukonči hledání.
4. Pokud není splněno ukončovací pravidlo, jdi na krok 2.
5. Řešení x^* odpovídá lokálnímu minimu.

Metoda tabu prohledávání

TL je posloupnost zakázaných řešení (tabu seznam)
$MaxSize$ je maximálně povolený počet řešení v tabu seznamu

1. Vyber výchozí řešení $x \in X$ a přiřaď $x^* = x$.
   Nastav $TL = \{x\}$.
2. Definuj okolí $N(x) \subseteq X \setminus TL$ a ohodnoť všechna řešení.
3. Nechť x' je nejlepší řešení z $N(x)$. Nahraď $x = x'$.
   Jestliže $f(x') < f(x^*)$, pak nahraď $x^* = x'$.
4. $TL = TL \cup \{x\}$. Jestliže $|TL| > MaxSize$, pak z TL odstraň první řešení.
5. Pokud není splněno ukončovací pravidlo, jdi na krok 2.
6. Řešení x^* je nejlepší nalezené řešení.

Metoda prahové akceptace

T je hodnota prahu akceptace horších řešení
T_0 je počáteční hodnota prahu
$r \in (0, 1)$ je míra redukce prahu

1. Vyber výchozí řešení $x \in X$ a přiřaď $x^* = x$. Nastav $T = T_0$.
2. Opakuj n-krát:
   - vyber $x' \in N(x)$,
   - jestliže $f(x') - T < f(x)$, pak nahraď $x = x'$,
   - jestliže $f(x') < f(x^*)$, pak nahraď $x^* = x'$.
3. Pokud není splněno ukončovací pravidlo, proveď redukci prahu $T = rT$ a jdi na krok 2.
4. Řešení x^* je nejlepší nalezené řešení.

Metoda simulovaného žíhání (SIAM)

T je teplota

T_0 je počáteční teplota

$r \in (0, 1)$ je míra redukce teploty (míra ochlazování)

1. Vyber výchozí řešení $x \in X$ a přiřaď $x^* = x$. Nastav $T = T_0$.
2. Opakuj n-krát:
   - vyber $x' \in N(x)$,
   - jestliže $f(x') < f(x)$, pak nahraď $x = x'$,
   - jestliže $f(x') \geq f(x)$, pak nahraď $x = x'$ s pravděpodobností $e^{-\frac{\Delta}{T}}$, kde $\Delta = f(x') - f(x)$,
   - jestliže $f(x') < f(x^*)$, pak nahraď $x^* = x'$.
3. Pokud není splněno ukončovací pravidlo (nebo nenastalo ztuhnutí procesu žíhání), pak proveď redukci teploty $T = rT$ a jdi na krok 2.
4. Řešení x^* je nejlepší nalezené řešení.

Genetický algoritmus

Definice:

Populace $R \subseteq X$ je konečná množina přípustných řešení.
$Fitness\ value$ $f(x)$ je ohodnocení řešení $x \in R$.
Selekce je výběr určitého páru řešení (rodičů) $x, y \in R$ založený na na jejich fitness value.
Křížení je operace spojení rodičů za účelem získání jednoho nebo dvou nových řešení (*potomků*).
Mutace je náhodná změna potomka.

Cílem selekce rodičů je vybrat lepší řešení s vyšší pravděpodobností. Předpokládejme, že fitness $f(x)$ je maximalizačního typu. Pak pravděpodobnost výběru rodiče x je dána jako

$$\frac{f(x)}{\sum\limits_{\forall y \in R} f(y)} \tag{293}$$

Genetický algoritmus

Nechť rodič x je dán kódem $x_1 x_2 \ldots x_r$, rodič y kódem $y_1 y_2 \ldots y_r$ a potomek z kódem $z_1 z_2 \ldots z_r$.

- Křížení rodičů
  - Jednobodové křížení
    Potomek #1: $x_1 \ldots x_p y_{p+1} \ldots y_r$,
    Potomek #2: $y_1 \ldots y_p x_{p+1} \ldots x_r$.
  - Dvoubodové křížení
    Potomek #1: $x_1 \ldots x_p y_{p+1} \ldots y_q x_{q+1} \ldots x_r$,
    Potomek #2: $y_1 \ldots y_p x_{p+1} \ldots x_q y_{q+1} \ldots y_r$.
  - Rovnoměrné křížení
    Potomek: $z_1 z_2 \ldots z_r$, kde $z_i \in \{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, r$.
- Mutace potomka
  - Jednobodová mutace
    Změněný potomek: $z_1 \ldots z_{p-1} z_p^* z_{p+1} \ldots z_r$, kde $z_p^* \neq z_p$.
  - Dvoubodová mutace
    Změněný potomek: $z_1 \ldots z_{p-1} z_q z_{p+1} \ldots z_{q-1} z_p z_{q+1} \ldots z_r$.

Mravenčí (feromonový) algoritmus

- Metoda je založena na *inteligenci mravenčích kolonií.*
- Každý mravenec se snaží najít cestu mezi mraveništěm a potravou.
- Mravenci zanechávají na cestě *feromonovou* stopu.
- Mravenci preferují cesty obsahující větší množství feromonu.
- Feromonové stopy na delších cestách se *vypařují* rychleji než na kratších cestách.
- Vypařování feromonu má velký význam, když zamezuje konvergenci k lokálnímu optimu.
- Idea algoritmu je napodobovat toto chování pomocí „simulovaných mravenců“ (umělých agentů) procházejících grafem reprezentujícím řešenou úlohu.