zabránili záporným hodnotám produkce, nezabývali jsme se případy, kdy jako výsledný objem produkce získáme desetinné číslo. Nápravu lze snadno sjednat zahrnutím tzv. *podmínek celočíselnosti*:

$$x_1,\ x_2 - \text{celé}, \tag{2.12}$$

které sice podporují smysluplnost modelu, ale určitým způsobem komplikují jeho řešitelnost. Úlohy s těmito podmínkami lze řešit pomocí speciálních metod *celočíselného lineárního programování*. V další části textu bude předmětem analýzy model (2.11), v němž nebudou podmínky (2.12) zahrnuty.

2.2 Grafické řešení úloh LP

V předešlé části jsme se seznámili s postupem, který vede k sestavení matematického modelu zadaného rozhodovacího problému. Dalším krokem, který logicky následuje, je samotné řešení úlohy. K řešení úloh LP se používá tzv. *simplexová metoda*, jejíž základy položil na konci 40. let 20. stol. americký matematik G. B. Dantzig. Od té doby zaznamenala metoda celou řadu modifikací. Tyto vysoce efektivní algoritmy tvoří jádro současného profesionálního softwaru, určeného pro řešení úloh LP. Přestože algoritmus simplexové metody je poměrně jednoduchý, jeho podrobný popis by znamenal znatelné vybočení z rámce této knihy. Později bude vysvětlen základní princip této metody, její úplný popis podávají např. Lagová a Jablonský (2009).

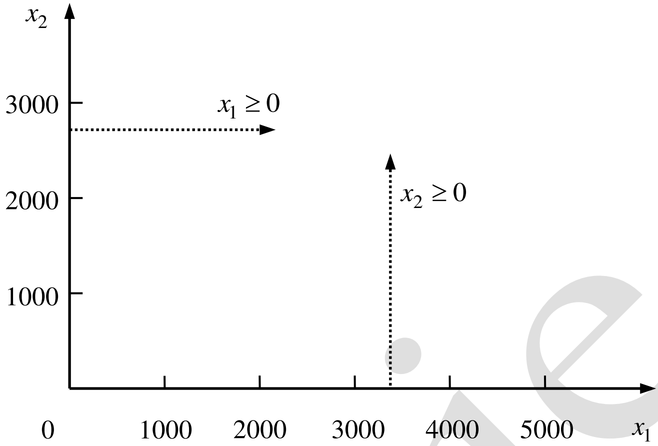
Obsahuje-li matematický model úlohy LP pouze dvě proměnné, lze pro řešení využít grafické znázornění. Postup grafického řešení úlohy LP si předvedeme na příkladu 2.1, jehož matematický model byl sestaven v předešlé části.

1. Znázornění množiny přípustných řešení

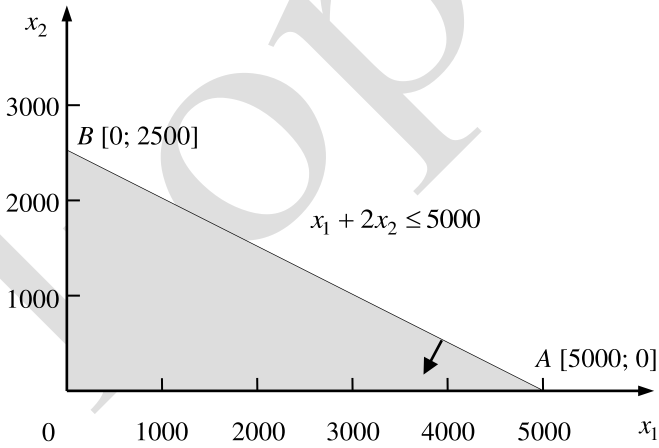
V prvním kroku grafického řešení zjistíme, jak vypadá množina bodů odpovídajících řešením, která vyhovují všem omezujícím podmínkám úlohy. Osy souřadnicového systému odpovídají proměnným x_1, x_2 (obr. 2.1). Vzhledem k platnosti podmínek nezápornosti má smysl uvažovat pouze I. kvadrant souřadnicového systému.

Nyní znázorníme množinu bodů, jejichž souřadnice vyhovují všem třem vlastním omezením úlohy. Grafickým obrazem první nerovnice (2.7), vyjadřující spotřebu řezbářské práce, je polorovina. Hranici poloroviny tvoří přímka, která je obrazem rovnice

$$x_1 + 2x_2 = 5000. \tag{2.13}$$



Obr. 2.1 – Podmínky nezápornosti

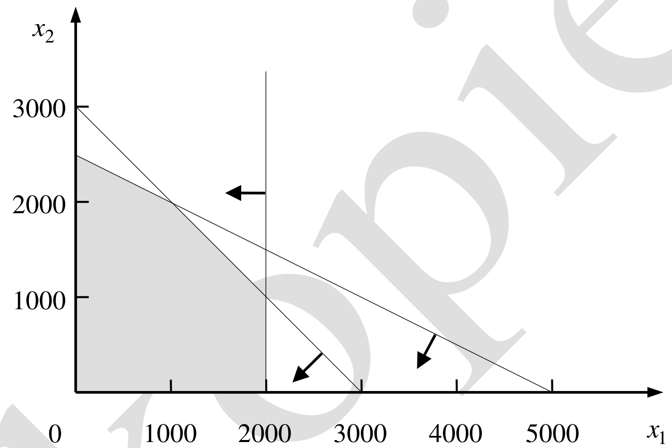


Obr. 2.2 – Řezbářská práce, množina přípustných bodů

Pro znázornění přímky v souřadnicovém systému stačí nalézt dva různé body, kterými prochází. Najdeme tedy průsečíky přímky s osami x_1, x_2. Zvolíme-li $x_2 = 0$ v rovnici (2.13), získáme $x_1 = 5000$; tedy první bod A má souřadnice

[5000; 0]. Po dosazení $x_1 = 0$ vypočteme $x_2 = 2500$; souřadnice druhého bodu B jsou [0; 2500]. Propojením bodů A, B získáme hraniční přímku poloroviny odpovídající první nerovnici[8] (obr. 2.2). Abychom zjistili, která polorovina, resp. její část, obsahuje přípustné body, stačí zvolit libovolný bod ležící mimo hraniční přímku (nejlépe počátek [0; 0]) a dosadit jeho souřadnice do nerovnice (2.7). Protože počátek této podmínce vyhovuje, je přípustným bodem a s ním také všechny body, které leží ve stejné polorovině. Na obr. 2.2 je tato polorovina, resp. její přípustná část, vystínována a navíc označena směrovou šipkou.

Podobně znázorníme množiny přípustných bodů, které vyhovují i zbývajícím dvěma omezením (2.8) a (2.9). Hraniční přímky, resp. jejich přípustné části všech tří vlastních omezení zachycuje obr. 2.3.



Obr. 2.3 – Množina přípustných řešení úlohy LP

Množiny[9] bodů vyhovujících jednotlivým podmínkám jsou naznačeny směrovými šipkami. Protože řešení úlohy musí vyhovovat zároveň všem omezujícím podmínkám, je nutné v grafu najít oblast, která je společným průnikem všech tří množin. Tato oblast je na obr. 2.3 vystínována a nazývá se *množina přípustných řešení úlohy LP*[10].

[8] Protože je zároveň nutné respektovat podmínky nezápornosti, přípustnými jsou pouze ty body, které leží na úsečce AB.

[9] Ve všech třech případech jde o oblasti, které mají společný vrchol ležící v počátku souřadnicového systému.

[10] Přesnější by bylo nazvat danou oblast *množinou přípustných bodů* odpovídající množině přípustných řešení úlohy LP, pro zjednodušení však budeme používat výše uvedené zkrácené pojmenování.

2. Znázornění účelové funkce

V dalším kroku grafického řešení úlohy LP se budeme zabývat účelovou funkcí a jejím vztahem ke grafickému obrazu množiny přípustných řešení, sestrojenému v prvním kroku. Jednou z možností je zaměřit se na body, které odpovídají stejné hodnotě účelové funkce, v našem případě zisku.

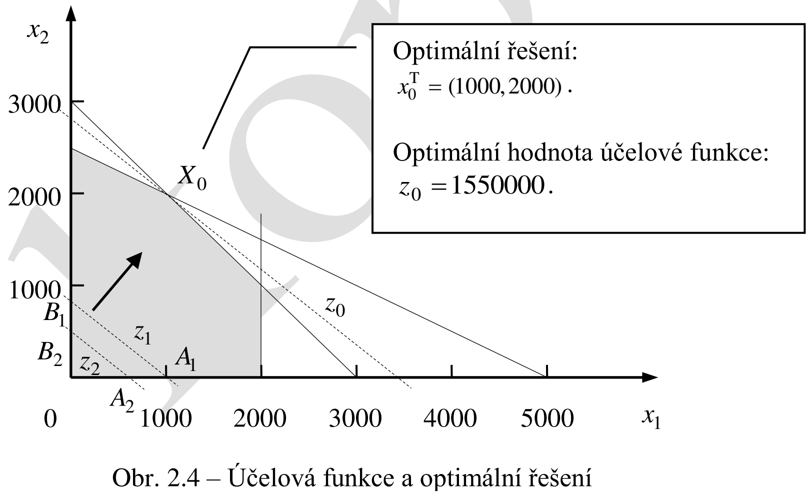
Zvolme libovolný bod ležící v množině přípustných řešení a vypočítejme příslušnou hodnotu zisku. V bodě A_1 [1000; 0] je hodnota účelové funkce

$$z_1 = 450.1000 + 550.0 = 450000.$$

Souřadnice všech bodů, které odpovídají této hodnotě zisku, musí vyhovovat rovnici

$$450x_1 + 550x_2 = 450000. \tag{2.14}$$

Body leží na přímce, protínající osu x_1 v bodě A_1. Bod B_1, ve kterém tato přímka protíná osu x_2, má souřadnice $[0; 818,\overline{18}]$. Na obr. 2.4 je tato přímka znázorněna přerušovanou čarou z_1.



Obr. 2.4 – Účelová funkce a optimální řešení

Pokud jsou koeficienty v účelové funkci celočíselné, pak je nejlepší zvolit jako hodnotu zisku součin těchto koeficientů, tj. 450.550 = 247500, čímž se při výpočtu souřadnic vyhneme dělení čísel a možnosti získání desetinného čísla. V tomto případě je navíc určení souřadnic průsečíků přímky s osami x_1, x_2 velice snadné. Osu x_1 protíná přímka v bodě, jehož první souřadnice je rovna koeficientu v účelové funkci, který je u proměnné x_2, tj. 550. Druhá souřadnice je samozřejmě nulová. Osu x_2 protíná přímka v bodě, jehož druhá souřadnice je rovna koeficientu v účelové funkci, který je u proměnné x_1, tj. 450. První souřadnice je nulová.

$B_2\,[0;\,450]$

$$z_2 = 450x_1 + 550x_2 = 247500. \tag{2.15}$$

$A_2\,[550;\,0]$

Z obr. 2.4 je patrné, že přímka z_1 je od počátku vizuálně dále než přímka z_2. Pro hodnoty zisku, které odpovídají těmto dvěma rovnoběžným přímkám, platí:

$$z_1 = 450000 > z_2 = 247500. \tag{2.16}$$

Je tedy možné zobecnit, že hodnota zisku se zvyšuje s rostoucí vzdáleností odpovídající přímky od počátku[11]. Směr růstu zisku je na obr. 2.4 naznačen směrovou šipkou.

3. Určení optimálního bodu

Výsledkem předchozího kroku, v němž jsme se zabývali účelovou funkcí, je určení:

a) sklonu přímky[12], na níž mají body stejnou hodnotu účelové funkce,
b) směru, ve kterém dochází ke zvyšování hodnoty účelové funkce.

V tomto kroku je cílem určit takový bod z množiny přípustných řešení, který leží na přímce s nejvyšší hodnotou účelové funkce. Sestrojíme tedy přímku rovnoběžnou s přímkami z_1, z_2, která protíná množinu přípustných řešení a je nejdále od počátku ve směru růstu hodnoty účelové funkce. Na obr. 2.4 je taková přímka označena jako z_0.

Bod X_0, ve kterém přímka z_0 protíná množinu přípustných řešení, je jediným optimálním bodem a jeho souřadnice odpovídají jedinému *optimálnímu řešení* zadané úlohy.

[11] Většinou se používá následujícího, i když nepřesného a zavádějícího výrazu: čím dále je účelová funkce od počátku, tím je hodnota zisku vyšší. Z uvedeného výkladu je zřejmé, že nejde o účelovou funkci, ale o její kolmý průmět do souřadnicového systému.
[12] Sklon této přímky je opět často zjednodušeně nazýván sklonem účelové funkce.

4. Výpočet optimálního řešení a optimální hodnoty účelové funkce

Určením optimálního bodu grafické řešení úlohy LP nekončí. Cílem předchozích kroků bylo zjistit, kde leží optimální bod. V našem případě je bod X_0 průsečíkem hraničních přímek polorovin odpovídajících první a druhé omezující podmínce. Z předchozí analýzy je zcela zřejmé, že tyto přímky jsou obrazem dvou rovnic:

$$x_1 + 2x_2 = 5000\,, \tag{2.17}$$

$$x_1 + x_2 = 3000\,. \tag{2.18}$$

K určení souřadnic průsečíku přímek stačí vyřešit soustavu rovnic (2.17) a (2.18), čímž získáváme následující vektor[13] optimálního řešení:

$$x_0^{\mathrm{T}} = (1000, 2000)\,. \tag{2.19}$$

Dosazením složek vektoru (2.19) do účelové funkce získáme optimální hodnotu zisku:

$$z_0 = 450.1000 + 550.2000 = 1550000\,. \tag{2.20}$$

5. Interpretace výsledků

Závěrečným krokem grafického řešení úlohy LP je interpretace vypočítaných hodnot. Je nutné dodržet tři hlavní zásady:

a) **Úplnost**. Zadavatel analýzy musí obdržet veškeré informace, které jsme získali řešením úlohy LP.

b) **Přesnost**. Výsledek analýzy či řešení je určitým návodem, resp. doporučením, které zadavateli umožní zlepšit fungování reálného systému. Na základě naší interpretace musí mít zadavatel jasnou a přesnou představu o všech rozhodnutích, která má v této souvislosti učinit.

c) **Srozumitelnost**. Při interpretaci musíme používat jazyk, kterému zadavatel analýzy rozumí. Zjednodušeně řečeno, zadavatele, který definoval problém, nemusí zajímat ani způsob formulace matematického modelu, ani metody, pomocí nichž jsme problém vyřešili. My jeho jazyk známe, on náš jazyk znát nemusí.

Nejprve se zaměříme na počet optimálních řešení. Jak ukážeme později, úloha LP může mít právě jedno optimální řešení, ale i nekonečně mnoho optimálních řešení, případně nemusí mít žádné optimální řešení,

[13] Vektory budeme v této knize považovat obecně za sloupcové. Řádkový vektor zapíšeme jako transponovaný vektor.

a dokonce ani žádné přípustné řešení. Z obr. 2.4 je zřejmé, že v našem případě má úloha právě jedno optimální řešení.

Optimálním řešením rozumíme vektor x_0, jehož složky odpovídají hodnotám rozhodovacích proměnných. Při formulaci matematického modelu jsme proměnnou x_1 označili počet vyrobených autíček a proměnnou x_2 počet vyrobených vláčků, v obou případech za jeden měsíc. Podle (2.19) má firma měsíčně vyrobit 1000 ks autíček a 2000 ks vláčků.

Cílem analýzy bylo dosáhnout maximálního zisku při zadaných podmínkách. Protože účelová funkce byla definována jako celkový měsíční zisk, firma podle (2.20) měsíčně získá 1550000 Kč.

Jelikož jednou ze zásad úspěšné interpretace je její úplnost, měli bychom se ujistit, že jsme poskytli veškeré informace, získané řešením. Majitele firmy bude jistě zajímat, zda je k naplánované výrobě skutečně zapotřebí 5000 hodin řezbářské práce a 3000 hodin dokončovací práce. Tuto skutečnost lze snadno ověřit dosazením optimálního řešení do vlastních omezení týkajících se spotřeby práce. V případě řezbářské práce i dokončovací práce se levá strana omezení rovná hodnotě pravé strany, což znamená, že všechny disponibilní hodiny budou zcela vyčerpány. K tomuto závěru jsme mohli dojít i v průběhu grafického řešení, aniž bychom prováděli dodatečný výpočet. Zjistili jsme, že optimální bod leží na průsečíku hraničních přímek polorovin, které byly obrazem omezujících podmínek pro oba druhy práce. Body, které leží na hraniční přímce, odpovídají situaci, v níž se produkce pohybuje na hranici výrobních možností vzhledem k zásobě určitého omezeného zdroje, v našem případě práce. S danou kapacitou nelze zvýšit objem výroby.

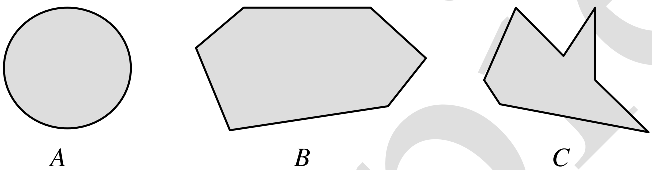
Dosazením optimálního řešení do poslední omezující podmínky, týkající se omezené poptávky po autíčkách, snadno zjistíme, že hodnota 2000 není v žádném případě limitujícím faktorem. Firma by mohla vyrobit ještě 1000 dalších autíček, na něž bohužel již nemá kapacity, jak vyplývá z předešlého odstavce.

K řešení výše uvedeného příkladu lze využít celou řadu optimalizačních nástrojů, popsaných v části 2.6. Řešení v MS Excel obsahuje Příloha 1.

2.3 Základní pojmy lineárního programování

V průběhu grafického řešení úlohy LP jsme zavedli dva důležité pojmy – *přípustné řešení* a *optimální řešení*. Cílem této části je seznámit čtenáře s dalšími termíny, které jsou nezbytné k pochopení principu obecných metod pro řešení úloh LP. Postup grafického řešení je postupem speciálním, který lze použít jen v případě, že matematický model obsahuje právě dvě rozhodovací proměnné[14].

Nejprve se vraťme k pojmu *přípustné řešení úlohy LP*. Jedná se o takové řešení, které vyhovuje všem omezujícím podmínkám úlohy, tj. vlastním omezením a podmínkám nezápornosti. Množina všech takových řešení dané úlohy se nazývá *množina přípustných řešení úlohy LP*. Pro úlohy lineárního programování je typické, že množina přípustných řešení je nekonečná[15]. Pokud se zajímáme o grafické vyjádření množiny přípustných řešení úlohy LP v podobě množiny přípustných bodů, je tato množina konvexní. *Konvexní množina* bodů je taková množina, která s každými dvěma body této množiny obsahuje i všechny body, které leží na jejich spojnici. Na obr. 2.5 jsou množiny *A*, *B* konvexní, množina *C* není konvexní.



Obr. 2.5 – Konvexní a nekonvexní množiny bodů

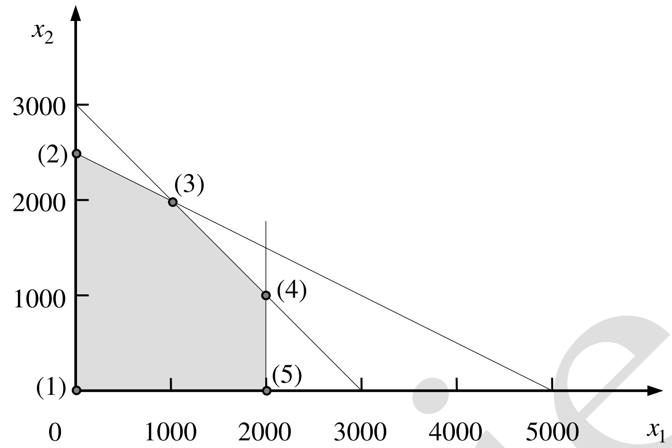
Množina *B* je typickým příkladem množiny přípustných řešení úlohy LP. Nazývá se *konvexním polyedrem*. Množina je určena soustavou lineárních nerovnic, tudíž její hranice je (v dvojrozměrném prostoru) tvořena lineárními čarami. Příklady konvexního polyedru v 3D prostoru jsou čtyřstěn, krychle, jehlan aj. Speciálním bodem konvexního polyedru je *vrchol* (*krajní bod*). Je to bod, který neleží na spojnici žádných jiných dvou bodů množiny. Počet vrcholů v úlohách lineárního programování je vždy konečný.

Vraťme se k příkladu 2.1, ve kterém byla množina přípustných řešení určena soustavou tří nerovnic typu $\leq$. Na obr. 2.6 je zobrazena množina přípustných řešení s 5 vrcholy, označenými (1), (2), (3), (4), (5).

Při řešení úlohy LP se nejprve převádí původní soustava omezujících podmínek obsažených v matematickém modelu na tzv. *ekvivalentní soustavu rovnic*. Důvodem je skutečnost, že při řešení úloh se používají metody, určené k řešení soustavy lineárních rovnic.

[14] Jak bylo uvedeno výše, obecnou metodou pro řešení rozsáhlých úloh, co do počtu proměnných i omezujících podmínek, je simplexová metoda.

[15] V některých speciálních případech může být množina přípustných řešení úlohy LP jednoprvková či prázdná.



Obr. 2.6 – Množina přípustných řešení, krajní body

Transformaci nerovnic na rovnice provedeme pomocí tzv. *přídatných proměnných*:

Typ podmínky	Přídatná proměnná
$\leq$	přičtení k levé straně
$\geq$	odečtení od levé strany
$=$	není

Tab. 2.2 – Transformace soustavy omezujících podmínek na ekvivalentní soustavu rovnic

V matematickém modelu (2.11) tvoří ekvivalentní soustavu rovnic následující tři rovnice:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 5000, \\ x_1 + \ \ x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 3000, \\ x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 2000, \end{aligned} \tag{2.21}$$

v nichž vystupují v roli přídatných proměnných nezáporné proměnné x_3, x_4 a x_5. V nerovnici typu $\leq$, resp. typu $\geq$, přídatná proměnná udává, o kolik je levá strana nižší, resp. vyšší než pravá strana. Hodnota přídatné proměnné má ekonomickou interpretaci. V příkladu 2.1 hodnota proměnné x_3 představuje počet nevyužitých hodin řezbářské práce, hodnota x_4 počet nevyužitých hodin dokončovací práce, hodnota proměnné x_5 počet autíček, který zbývá k využití povoleného limitu z hlediska odbytu.

Soustava 3 rovnic s 5 neznámými má obecně nekonečně mnoho řešení. Mezi nimi existuje konečný počet tzv. *základních řešení*. Jedná se o řešení, v nichž jsou za 2 zvolené proměnné dosazeny nuly a hodnoty zbývajících 3 proměnných jsou pak dopočítány. Zvolené proměnné s nulovými hodnotami nazýváme *nezákladní proměnné*, proměnné s dopočítanými hodnotami se nazývají *základní proměnné*. Základní řešení soustavy (2.21) budeme označovat jako *základní řešení ekvivalentní soustavy rovnic*.

Počet základních řešení je logicky určen počtem všech možností, kterými lze vybrat nezákladní proměnné ze všech proměnných. V našem případě je tento počet roven kombinačnímu číslu

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10 . \tag{2.22}$$

Může se ovšem stát, že po výběru nezákladních proměnných vzniklá soustava 3 rovnic se 3 neznámými nebude mít řešení. Lze tedy s jistotou říci, že hodnota (2.22) je horní mezí počtu základních řešení.

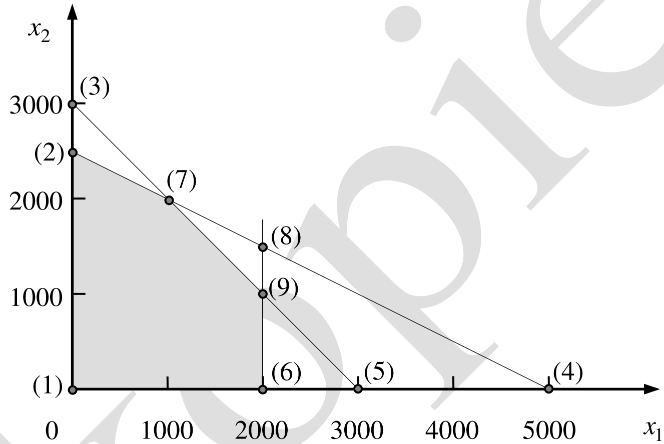
Tabulka 2.3 obsahuje 9 základních řešení (ZŘ) soustavy (2.21). Poslední očekávané základní řešení ekvivalentní soustavy rovnic neexistuje. Jedná se o případ, ve kterém vynulujeme proměnné x_1, x_5. Takové hodnoty nevyhovují třetí rovnici v uvedené ekvivalentní soustavě.

ZŘ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	0	5000	3000	2000
2	0	2500	0	500	2000
3	0	3000	-1000	0	2000
4	5000	0	0	-2000	-3000
5	3000	0	2000	0	-1000
6	2000	0	3000	1000	0
7	1000	2000	0	0	1000
8	2000	1500	0	-500	0
9	2000	1000	1000	0	0

Tab. 2.3 – Základní řešení ekvivalentní soustavy rovnic

Na první pohled je zřejmé, že některé z těchto bodů neleží v množině přípustných řešení. Jedná se o body (3), (4), (5), (8). V tabulce 2.3 jsou to řešení, u nichž je hodnota alespoň jedné proměnné záporná. Jak bylo zmíněno výše, podmínky nezápornosti platí nejen pro rozhodovací proměnné, ale také pro přídatné proměnné. Uvedená řešení tyto podmínky porušují. Naopak řešení (1), (2), (6), (7), (9) splňují podmínky nezápornosti a jsou tedy přípustnými řešeními úlohy LP. Tato řešení se nazývají *základní řešení úlohy LP*. Je zcela jasné, že jejich množina je podmnožinou množiny základních řešení ekvivalentní soustavy rovnic.

Na obr. 2.7 jsou označeny body odpovídající všem základním řešením, uvedeným v tabulce 2.3.



Obr. 2.7 – Základní řešení ekvivalentní soustavy rovnic

Přejděme nyní k dalšímu pojmu lineárního programování – optimálnímu řešení. *Optimální řešení úlohy LP* je přípustné řešení úlohy LP s nejlepší hodnotou účelové funkce. Z grafického řešení úlohy LP lze snadno dospět k závěru, že optimálním bodem nemůže být v žádném případě vnitřní bod množiny přípustných řešení. Optimální bod musí být, pokud existuje, hraničním bodem množiny přípustných řešení. Navíc platí následující věta, která má zásadní význam pro řešení úloh LP.

Základní věta lineárního programování: Jestliže má úloha LP optimální řešení, má také optimální řešení základní.

1) Pokud má úloha LP právě jedno optimální řešení, pak to musí být, podle uvedené věty, základní řešení. Protože základní řešení úlohy LP

odpovídají vrcholům konvexního polyedru přestavujícího množinu přípustných bodů, musí v tomto případě optimální řešení ležet v jednom z vrcholů.

2) Má-li úloha LP více optimálních řešení, věta zaručuje, že alespoň jedno bude základním řešením, tedy optimální bod najdeme v jednom z vrcholů množiny přípustných řešení.

Důsledek základní věty LP: Jestliže má úloha LP optimální řešení, stačí se při jeho hledání soustředit pouze na základní řešení úlohy LP, neboť jedno z nich musí být řešením optimálním.

Vraťme se ke grafickému řešení úlohy LP v příkladu 2.1. Podle základní věty LP a jejího důsledku jsme se mohli zaměřit jen na vrcholy množiny přípustných řešení. Byl totiž splněn hlavní předpoklad, a sice zaručení existence optimálního řešení: Úloha LP má optimální řešení, pokud je množina přípustných řešení omezená. Můžeme tedy sestavit seznam základních řešení úlohy LP, mezi nimiž musí být alespoň jedno optimálním řešením. V tabulce 2.4 jsou u každého řešení uvedeny hodnoty rozhodovacích proměnných a hodnota zisku po jejich dosazení do účelové funkce. Označení základních řešení odpovídá označení bodů na obr. 2.7.

ZŘ	x_1	x_2	z
(1)	0	0	0
(2)	0	2500	1375000
(6)	2000	0	900000
(7)	1000	2000	1550000
(9)	2000	1000	1450000

Tab. 2.4 – Základní řešení úlohy LP, optimální řešení

Řešení (7) s nejvyšší hodnotou zisku 1550000 je hledaným optimálním řešením. Protože hodnoty zisku pro všechna ostatní řešení jsou nižší, je řešení (7) jediným optimálním řešením úlohy.

2.4 Princip simplexové metody

Jak bylo uvedeno v předchozích částech, pro řešení úloh LP se používá *simplexová metoda*. Je to univerzální iterační postup, který efektivním způsobem prohledává množinu základních řešení úlohy LP za účelem nalezení optimálního řešení. Metoda je založena na základní větě LP a jejích důsledcích. Protože se zaměřuje jen na základní řešení úlohy LP, kterých je konečný počet, nalezne simplexová metoda po konečném počtu iterací optimální řešení nebo zjistí, že optimální řešení neexistuje.